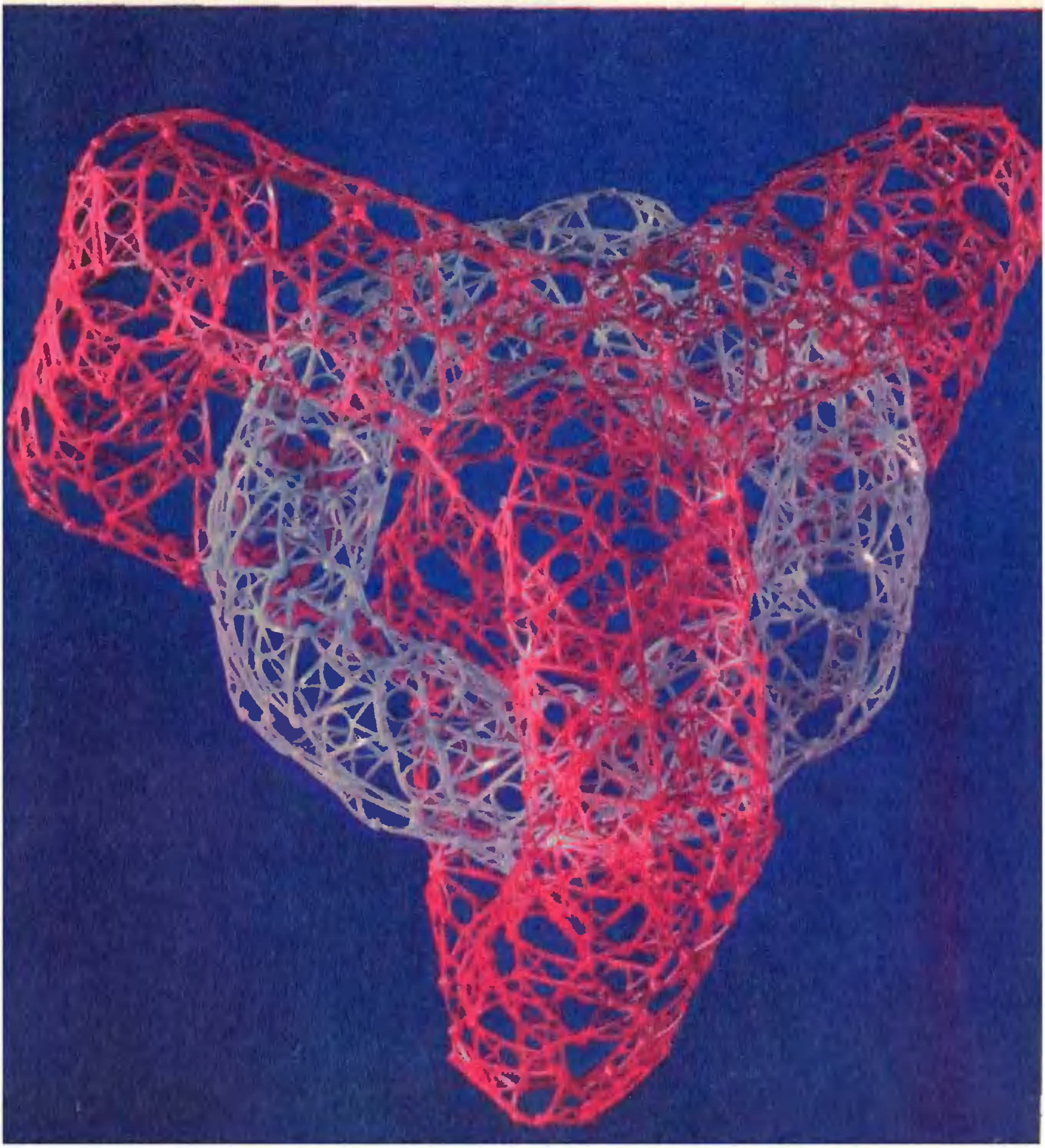
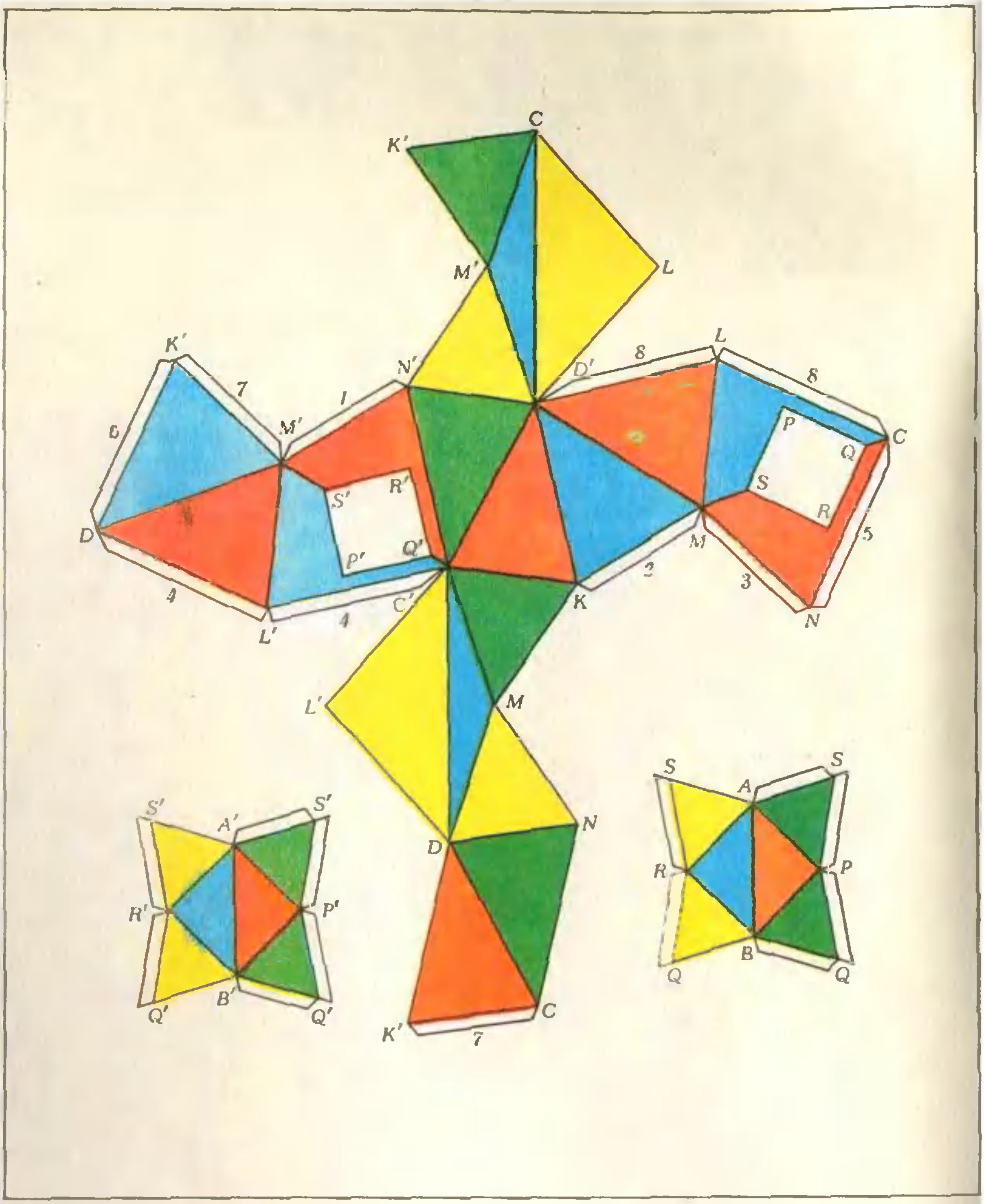
ISSN 0130-2221

КВАНТ

7
1979

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





На этом рисунке показана развертка модели «непрерывно изгибаемого многогранника Конелли», построенной харьковскими геометрами. Как изготовить такую действующую модель — это совсем не сложно — вы можете прочитать на с. 39. О том, как получается многогранник Конелли, мы уже писали (см. «Квант», 1978, № 9, с. 17).

Основан в 1970 году

Квант

7
1979

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

На первой странице обложки показаны две поверхности — тор и «сфера с тремя ручками», построенные из конструктора, о котором можно прочитать на с. 21.

В этом году исполнилось 100 лет со дня рождения Леонида Исааковича Мандельштама (1879—1944) — выдающегося советского физика, академика, замечательного педагога, создателя одной из крупнейших советских физических научных школ.

Мы помещаем в этом номере статью одного из учеников Мандельштама — академика АПН СССР В. А. Фабриканта, в которой он делится своими воспоминаниями о Л. И. Мандельштаме и рассказывает об одном из основных открытий этого замечательного ученого. Мы публикуем также, с небольшими сокращениями, вводную лекцию, прочитанную Л. И. Мандельштамом в 1918 году студентам Одесского политехнического института. Эта лекция была посвящена вопросу, который не утратил своей актуальности и сегодня, — зачем изучать физику будущему инженеру?

В. Фабрикант

Леонид Исаакович Мандельштам

Мандельштам — педагог

О Леониде Исааковиче Мандельштаме я, студент-первокурсник, впервые услышал в 1925 г. на заседании предметной комиссии по физике Московского государственного университета. В эту комиссию, наряду с преподавателями, входили и представители студентов. Председатель сообщил, что удалось пригласить для работы в МГУ очень крупного ученого, известного физика — Л. И. Мандельштама. Мы, студенты, естественно, были заинтригованы.

Вскоре начались знаменитые мандельштамовские семинары. Студент-старшекурсник С. Шубин, ставший потом видным физиком-теоретиком и почему-то опекавший меня, посоветовал ходить на эти семинары. Он сказал: «Поначалу ты мало что будешь понимать, но зато почувствуешь дух настоящей науки». Обе части его предсказания оправдались.

На семинарах Л. И. все было для нас необычно. Прежде всего — состав семинара. В нем участвовали не только студенты и аспиранты, но и многие наши преподаватели и совсем посторонние для нас, студентов, люди. В связи с этим семинары проводились в самой большой аудитории. «Взрослые» занимали первые скамьи в аудитории, несколько подальше сидели студенты.

На семинаре царила атмосфера доброжелательного внимания к высказываниям любого участника, независимо от его научного «ранга». Никто не боялся задавать «глупые» вопросы, многие из которых, после тщательного обсуждения, оказывались далеко не такими «глупыми», как это казалось сначала. Вместе с тем любая физическая ошибка выяснялась и критиковалась в четкой, но не обидной форме. Решающую роль в создании такой атмосферы доброжелательности и корректности играли личные качества Л. И. Словами трудно передать его обаяние. Каждая встреча с ним была для нас радостью. Когда по каким-либо причинам Л. И. отсутствовал на семинаре, студенты говорили «чай без сахара».

Обычно Л. И. предварял доклад кого-либо из участников семинара несколькими краткими замечаниями, а после доклада подводил итоги. Нас поражала его способность излагать самые сложные вопросы просто и, с другой стороны, умение обнаруживать сложности в простых, на первый взгляд, вопросах. Недаром в те годы у физиков появился термин «мандельштамовская ясность».

Когда на четвертом курсе подошла моя очередь выступать в качестве докладчика на семинаре, я лично убедился в том, какую большую работу проводили Л. И. и его сотрудники, готовя нас к выступлению. Сам Л. И. был блестящим лектором и докладчиком. Ученик его С. М. Рытов пишет в своих воспоминаниях: «Я много думал над тем, в чем «секрет» совершенно особого воздействия выступлений Л. И., того эмоционального подъема, который они всегда вызывали. Его лекции и доклады захватывали аудиторию, заставляли забывать обо всем на свете и переживать услышанное. Так бывает с лучшими произведениями театра или кино, вообще искусства. Но... «оружием» Л. И. было не краснобайство или «театральщина», а замечательное уменье поразить слушателей, задеть их за живое, зажечь интерес и заставить увидеть вопросы там, где, казалось бы, все уже ясно в силу сказанного ранее».

Я невольно, как бывший студент Л. И., начал с характеристики Мандельштама-педагога, но это отнюдь не означает, что для него преподавание было главным делом. Правильнее будет сказать, что у Л. И. трудно было провести четкую границу между исследовательской деятельностью и преподаванием.

Мандельштам — ученый

В 1929 г. Л. И. Мандельштам был избран академиком. Выдающийся ученый, он создал одну из самых крупных советских научных школ в области физики. Его ученики — академики А. А. Андронов и М. А. Леонтович, член-корреспондент С. М. Рытов, профессора Г. С. Горелик, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, С. П. Стрелков. Его близкие сотрудники — академики Г. С. Ландсберг и И. Е. Тамм. Нельзя не упомянуть о близком друге Л. И. академике Николае Дмитриевиче Папалекси, с которым он работал совместно 45 лет. Все это — крупные имена в науке. Сейчас успешно работают научные «внуки» и «правнуки» Л. И.

Для того чтобы было понятно, как складывался круг научных интересов Л. И., нужно привести некоторые краткие биографические данные. Окончив в 1897 г. гимназию с золотой медалью, Л. И. поступил на математическое отделение физико-математического факультета Новороссийского университета. Однако в 1899 г., в связи со студенческими беспорядками, он был исключен из университета и уехал за границу, в Страсбург, где поступил на физико-математический факультет университета. Кафедру физики в этом университете занимал выдающийся ученый Ф. Браун, получивший в 1909 г. Нобелевскую премию за работы по радиотелеграфии. Он же был директором образцового для того времени физического института в Страсбурге.

Браун очень скоро оценил исключительные способности Л. И. и привлек его к научной работе в области физики электромагнитных колебаний. Первая научная статья Л. И. была посвящена определению времени затухания колебаний в контуре.

После окончания университета Л. И. в качестве ассистента Ф. Брауна продолжал активную исследовательскую работу, совмещая ее с участием в заводских испытаниях новой радиоаппаратуры. В этот период Л. И. сделал свое первое (из 60!) изобретение, позволившее существенно повысить чувствительность приемной радиоаппаратуры. Характерно, что это изобретение, имевшее большую практическую ценность, было сделано на основе проведенного Л. И. теоретического анализа.

Всю последующую жизнь Л. И. занимался главным образом физикой и техникой колебаний и волн самой различной природы, поразительно сочетая творческую деятельность в столь разнородных областях, как проблемы теоретической физики, тонкости физического эксперимента и решение конкретных инженерных задач. А. А. Андронов в докладе, посвященном первой годовщине со дня смерти Л. И., очень правильно сказал: «...в наше время резкого деления физиков на теоретиков и экспериментаторов, на «чистых» физиков и «технических» физиков, Л. И.— одновременно теоретик и экспериментатор, «чистый» физик и «технический» физик». К этим словам хочется добавить, что Л. И. умел ценить творческое начало в любой, даже очень далекой от науки и искусства области. Помню, с каким восхищением он говорил об изобретении застежки «молния», в то время — новинки, и интересовался, кто сделал это остроумное изобретение.

К страсбургскому периоду относится также полемика Л. И. со знаменитым уже в то время физиком, родоначальником квантовой теории Максом Планком. Л. И., несмотря на прирожденную скромность и мягкость характера, твердо стоял на том, что у Планка в работе, посвященной волновой теории распространения света в прозрачных средах, есть принципиальная ошибка. После длительной полемики Планк признал правоту Мандельштама. Этот эпизод интересен еще и тем, что здесь проявилась способность Л. И. находить аналогию между явлениями в далеких друг от друга областях физики. В споре с Планком, судя по всему, Л. И. была использована аналогия между соседними атомами среды с колеблющимися в них электронами и близко расположенными работающими радиоантеннами.

В те же годы Л. И. начал цикл работ по молекулярному рассеянию света.

Каждый знает, что в мутной среде, будь то туман или молочное стекло, свет рассеивается. Причиной рассеяния является оптическая неоднородность среды. Например, капельки воды, образующие туман, имеют показатель преломления, резко отличающийся от показателя преломления воздуха. Казалось бы, в чистом воздухе не должно быть рассеяния света. Однако это не так. То, что мы видим над собой голубое небо, есть результат рассеяния солнечного света молекулами воздуха земной атмосферы. (Недаром на очень высоких горах небо даже днем кажется темным.) Молекулярное рассеяние света происходит также из-за оптической неоднородности среды; но причиной этой неоднородности является хаотическое тепловое движение атомов или молекул. Это движение приводит к случайному возрастанию концентрации атомов или молекул в одних точках среды и убыванию в других. Такие отклонения плотности от среднего значения называются флуктуациями плотности. Эти флуктуации вызывают, в свою очередь, локальные изменения показателя преломления среды, и среда становится оптически неоднородной, рассеивающей свет. Л. И. в 1913 г. опубликовал работу о молекулярном рассеянии света при отражении от поверхности жидкости, обладающей шероховатостью опять-таки за счет хаотического теплового движения молекул. Эту работу, содержавшую и теорию явления, и описание эксперимента, Эйнштейн доложил на своем семинаре и прислал Л. И. открытку, в которой назвал работу «красивой».

В 1914 г., когда начала надвигаться угроза войны, Л. И. вернулся на родину.

Эффект Мандельштама—Бриллюэна

Продолжая размышлять над проблемами молекулярного рассеяния, Л. И. в 1918 г. пришел к выводу, что процесс рассасывания флуктуаций плотности в среде должен вызывать модуляцию амплитуды рассеянных флуктуациями световых волн. Всякая модуляция волн вызывает изменение их частоты. Например, при радиопередаче диктор, говоря в микрофон, модулирует со звуковыми частотами амплитуду радиоволн, и в излучении радиостанции кроме основной, несущей, частоты появляются боковые полосы частот.

Процесс возникновения и рассасывания флуктуаций можно представить как результат наложения упругих акустических волн, распространяющихся в среде по всевозможным направлениям со скоростью звука. Эти волны модулируют рассеянную веществом световую волну. Так что в рассеянном свете помимо основной, несущей, частоты ν_0 (частота падающего света) появляются дополнительные частоты $\nu_0 + \Delta\nu$ и $\nu_0 - \Delta\nu$, где $\Delta\nu$ — частота модулирующих акустических колебаний *). Относительное изменение частоты ($\Delta\nu/\nu$) равно отношению скорости звука в веществе к скорости света. Скорость звука даже в твердых кристаллах типа кварца составляет около $6 \cdot 10^3$ м/с, а скорость света — $3 \cdot 10^8$ м/с, так что относительное изменение частоты составляет тысячные доли процента. Таким образом, модуляция при рассеянии света на флуктуациях плотности — очень тонкий эффект. К этому надо добавить, что интенсивность молекулярного рассеяния весьма мала (10^{-6} или 10^{-7} от интенсивности падающего света).

Долгое время Мандельштам не имел возможности поставить тонкие эксперименты по проверке своего теоретического предсказания; поэтому он опубликовал соответствующую статью только в 1926 г. В 1922 г. появилась статья французского физика Бриллюэна, содержавшая часть теоретических результатов Л. И. Описанное явление было позднее экспериментально обнаружено и получило название эффекта Мандельштама — Бриллюэна. Однако до этого было сделано очень важное открытие.

Открытие комбинационного рассеяния света

В 1925 г., после прихода Л. И. в Московский университет, он, совместно с Г. С. Ландсбергом, приступил к экспериментам по исследованию молекулярного рассеяния света в кристаллах с целью обнаружить указанный выше эффект.

Трудности были весьма велики. Надо было прежде всего надежно выделить слабое молекулярное рассеяние, забиваемое обычно сильным рассеянием света на дефектах структуры кристаллов. Здесь Г. С. Ландсбергом был применен остроумный

---

*) Для знающих тригонометрию. Амплитуда модулированной с частотой $\Delta\nu$ волны может быть записана так: $A(t) = a[1+\cos(2\pi\Delta\nu \cdot t)]$. Тогда полное выражение для модулированной волны:

$$A(t)\cdot\cos(2\pi\nu_0\cdot t) = a[1+\cos(2\pi\Delta\nu\cdot t)]\cos(2\pi\nu_0\cdot t) =$$

$$= a\cos(2\pi\nu_0\cdot t) + \frac{a}{2}\cos[2\pi(\nu_0+\Delta\nu)t] + \frac{a}{2}\cos[2\pi(\nu_0-\Delta\nu)t],$$

т. е. модулированная волна равна сумме трех волн с частотами, указанными в тексте.

прием. С повышением температуры растет скорость теплового движения атомов, молекул или ионов вещества, а это приводит к росту величины флуктуаций. С ростом же величины флуктуаций увеличивается интенсивность молекулярного рассеяния. Вместе с тем рассеяние на дефектах кристалла не зависит от температуры. Поэтому повышение температуры образца позволяет выделить молекулярное рассеяние в «чистом виде». Именно этот факт и предложил использовать Ландсберг.

Однако в МГУ не было спектральной аппаратуры, способной обнаружить малые изменения частоты, соответствующие эффекту Мандельштама — Бриллюэна. Мандельштам и Ландсберг пытались обойти это затруднение, используя сравнительно грубый спектрограф.

Как это ни удивительно, грубость аппаратуры сыграла положительную роль, приведя к открытию совершенно нового, важного явления — комбинационного рассеяния света. При комбинационном рассеянии — КР — возникают большие изменения частоты, на несколько порядков превышающие эффект Мандельштама — Бриллюэна. Чувствительная аппаратура, необходимая для наблюдения эффекта Мандельштама — Бриллюэна, оказалась бы слишком «деликатной» для обнаружения КР.

На рисунке 1 изображена схема экспериментальной установки для исследования рассеяния света в кристаллах. В качестве источника света использовалась ртутная лампа, спектр которой состоит из ряда спектральных линий (рис. 2, *а*). В спектре света, рассеянного кристаллом кварца, около каждой яркой линии ртути было обнаружено появление дополнительных линий — спутников или, как их называют, сателлитов (рис. 2, *б*). Однако частоты, соответствующие этим линиям, отличались от частоты падающего света на гораздо бо̀льшую величину, чем это ожидалось по теории эффекта Мандельштама — Бриллюэна. Это новое явление и получило название комбинационного рассеяния. Первые снимки спектров КР были получены в

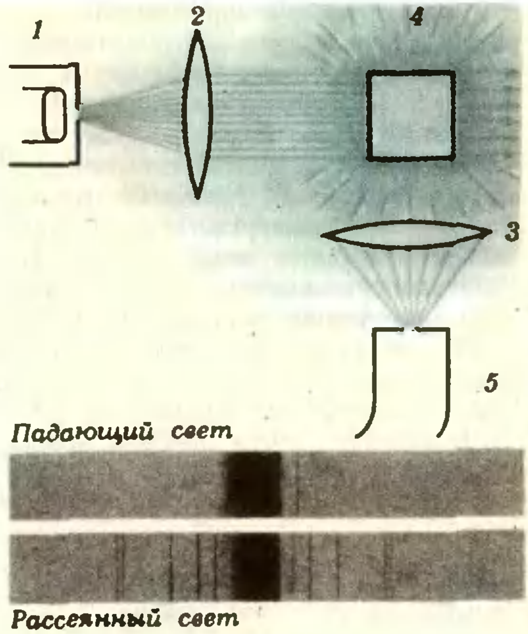


Рис. 1. Схема эксперимента, в котором было обнаружено комбинационное рассеяние света в кристаллах. *1* — ртутная лампа; *2*, *3* — линзы; *4* — кристалл; *5* — спектрограф.

МГУ в 1927 г. Однако первое сообщение о сделанном открытии было отправлено в печать только 6 мая 1928 г. Задержка была вызвана необычайно высокой требовательностью Л. И. к уровню своих публикаций. Время ушло на проведение контрольных опытов, подтвердивших реальность наблюдаемого явления, и на нахождение правильного его объяснения. В результате этой задержки сообщение индийского физика Рамана об открытии аналогичного явления при рассеянии света в жидкостях опередило сообщение советских физиков на пару месяцев.

Большинством крупных физиков (Резерфорд, Борн и др.) было при-

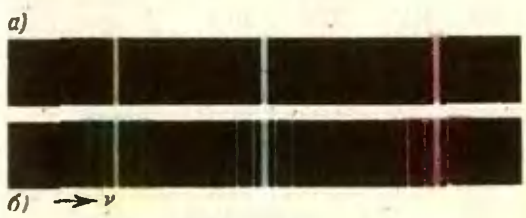


Рис. 2. *а*) Спектр ртутной лампы; *б*) спектр рассеянного света.

знано, что открытие комбинационного рассеяния сделано Ландсбергом и Мандельштамом в кристаллах и Раманом в жидкостях, независимо друг от друга и практически одновременно. Однако в 1930 г. Нобелевская премия за это открытие была присуждена одному Раману, что было явной несправедливостью.

Л. И., исходя из классических соображений, указал, что КР в кристаллах, так же как и эффект Мандельштама — Бриллюэна, возникает благодаря модуляции рассеянного света колебаниями кристаллической решетки. Однако в данном случае роль модулирующих колебаний играют не акустические, а так называемые оптические колебания решетки. Частоты этих колебаний лежат в инфракрасной области спектра. На рисунке 3 изображены два типа волн, возникающих в кристаллической решетке, построенной из атомов двух сортов. Рисунок 3, *а* соответствует звуковой волне и, соответственно, акустическим колебаниям решетки. Рисунок 3, *б* соответствует оптическим волнам и колебаниям. Именно эти оптические колебания модулируют падающую на кристалл световую волну, что и вызывает комбинационное рассеяние света.

При КР в жидкостях и газах модуляцию света вызывают колебания атомов, входящих в состав отдельных молекул. Согласно классической теории модуляции при КР в спектре рассеянного света около каждой спектральной линии падающего света должно возникать несколько симметрично расположенных линий — спутников. Частоты спутников получаются путем комбинирования частоты падающего света с частотами внутримолекулярных колебаний (отсюда и происходит название явления) и удовлетворяют простым соотношениям:

$$\nu_к = \nu_0 - \nu_м,$$
$$\nu_ф = \nu_0 + \nu_м, \qquad (1)$$

где $\nu_к$ — частота «красного» спутника, то есть линии, смещенной относительно основной (из спектра падающего света) в сторону бо́льших длин волн, $\nu_ф$ — частота «фиолетового» спутника, то есть линии, смещенной в сторону меньших длин волн, $\nu_м$ — частота внутримолекулярных колебаний (частота модуляции).

Соотношения (1) прекрасно согласуются с опытом. Однако, согласно классической теории, интенсивности симметрично расположенных спутников должны быть одинаковыми. Этот вывод находится в резком противоречии с опытом. Интенсивность каждого «красного» спутника во много раз больше интенсивности симметричного ему «фиолетового» спутника (см. рис. 2, *б*). Это различие интенсивностей нельзя объяснить исходя из классической теории модуляции. Необходимо учесть квантовые свойства света и вещества.

Согласно классическим представлениям два симметрично расположенных спутника возникают при рассеянии света на одной и той же молекуле. Согласно квантовым представлениям «красный» спутник возникает при рассеянии света — фотонов — на молекуле, обладающей меньшим запасом внутренней энергии, а «фиолетовый» — при рассеянии на возбужденной молекуле с увеличенным запасом энергии (на классическом языке эти молекулы отличаются амплитудой внутримолекулярных колебаний). Согласно квантовым законам энергия внутримолекулярных колебаний может изменяться только определенными порциями, квантами, равными $h\nu_м$, где h —

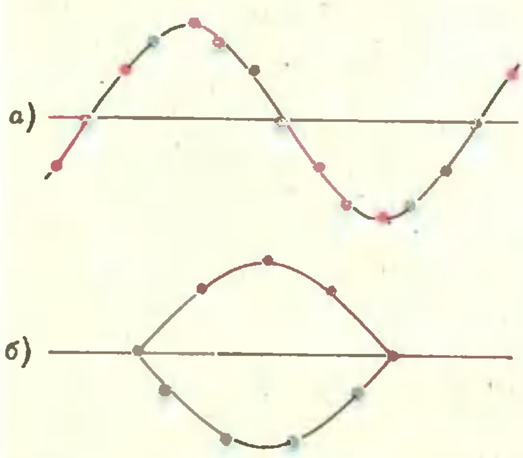


Рис. 3. Два типа волн, возникающих в кристаллической решетке, построенной из атомов двух сортов.
***а*) Акустическая волна; *б*) оптическая волна.**

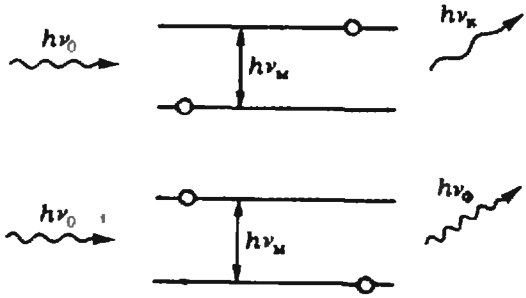


Рис. 4. Возникновение «красных» и «фиолетовых» спутников при КР.

постоянная Планка, $\nu_м$ — частота внутримолекулярных колебаний. На рисунке 4 приведены два энергетических уровня, соответствующие дозволенным значениям энергии молекулы. «Расстояние» между уровнями равно $h\nu_м$.

Квантовая теория рассматривает свет как поток фотонов. Энергия фотона падающего на молекулу света частоты ν_0 равна $h\nu_0$. При взаимодействии с молекулой, находящейся на нижнем энергетическом уровне, фотон отдает молекуле часть своей энергии, равную $h\nu_м$, переводит молекулу на более высокий энергетический уровень и превращается в фотон с меньшей энергией:

$$h\nu_к = h\nu_0 - h\nu_м, \qquad (2)$$

$h\nu_к$ — энергия фотона света «красного» спутника. При взаимодействии с возбужденной молекулой, находящейся на более высоком энергетическом уровне, фотон забирает у молекулы энергию, равную $h\nu_м$, переводит молекулу на более низкий энергетический уровень и превращается в фотон с большой энергией:

$$h\nu_ф = h\nu_0 + h\nu_м, \qquad (3)$$

$h\nu_ф$ — энергия фотона света «фиолетового» спутника. Можно сказать, что при комбинационном рассеянии происходит как бы сложение и вычитание квантов.

Если в равенствах (2) и (3) сократить левую и правую части на h, то получатся равенства (1). Таким образом, в смысле частот и классическое, и квантовое рассмотрения приводят к одинаковым результатам, согласующимся с опытом. Зато квантовое рассмотрение с легкостью объясняет различие интенсивностей «красных» и «фиолетовых» спутников. Все дело в том, что обычно число молекул на нижнем энергетическом уровне значительно превышает число молекул на более высоком уровне. Поэтому число «столкновений» фотонов с молекулами, приводящих к возникновению фотонов «красного» спутника, во много раз превыщает число «столкновений», приводящих к возникновению фотонов «фиолетового» спутника.

Комбинационное рассеяние получило очень широкое применение в исследовании структуры молекул и кристаллов. Недаром Л. И. говорил: «Так же как спектр обычного радиотелефонного передатчика несет в себе весь ваш разговор, все, что вы хотите сказать, так и спектр рассеянного света несет то, что молекула говорит о себе. Изучая его, вы изучаете ее строение».

Я смог рассказать только о небольшой части научных работ Л. И. Мандельштама. Им получен еще ряд фундаментальных результатов в теории колебаний (новые виды резонанса, теория нелинейных колебаний и т. д.). Особое внимание Л. И. уделял степени экспериментальной и логической обоснованности физических теорий.

Несколько слов об отношении Л. И. к искусству. Без этого портрет его будет неполным. Л. И. был глубоким ценителем литературы и музыки. Любимым поэтом его был Пушкин, почти всю поэзию которого он знал наизусть.

Последний раз я встретил Леонида Исааковича в 1944 г. на концерте бетховенской музыки в Московской консерватории. Он стоял в фойе, и его лицо буквально светилось радостью. Увидев меня, Л. И. сказал, что, собираясь на концерт, сильно волновался — придут ли люди слушать музыку немецкого композитора, когда идет такая тяжелая война с Германией, и был очень обрадован тем, что уже на дальних подступах к консерватории у него стали спрашивать, нет ли лишнего билета. Таким он запомнился мне на всю жизнь.

Л. Мандельштам

Почему физика нужна инженеру?

Приступая к чтению лекций по физике, я хотел бы, прежде чем перейти к систематическому изложению предмета, остановиться сегодня на одном общем вопросе и поделиться с вами некоторыми соображениями насчет того положения, которое физика занимает и, по моему убеждению, должна занимать в ряде наук, изучению которых вы собираетесь посвятить ближайшие годы.

Мне хотелось бы дать вам материал, на основании которого вы могли бы сами убедиться, что физика нужна инженеру всегда, во все время его деятельности, и что на нее нельзя смотреть, как на предмет, который нужно — да и нужно ли? — раз пройти, а потом можно и забыть, так как ведь все равно то, что необходимо знать инженеру из физики, еще раз повторяется при прохождении специальных предметов.

Говоря, что инженеру нужна физика, я имею в виду не только то, что он должен быть знаком с теми отдельными явлениями и законами, с которыми он непосредственно встречается в своей практической деятельности. Такое утверждение было бы само собой очевидным. Что инженер-строитель, рассчитывая прочность сооружения, должен быть знаком с основными законами упругости, что инженер-электротехник в проектировании, скажем, осветительной сети должен знать закон Ома, связывающий силу тока, сопротивление и электродвижущую силу батареи, и т. д. — это, конечно, не нуждается в доказательстве. Нет, когда я говорю, что инженеру нужна физика, я этим хочу сказать, что ему нужно широкое владение этим предметом в его совокупности; я утверждаю, что ему нужно знание физики самой по себе как цельной дисциплины с ее специфической методикой, а не только в зависимости от текущих применений. Я утверждаю, наконец, что для этого инженеру недостаточно знать только опытную часть ее, а что он должен быть основательно знаком и с теорией.

Но для того чтобы показать, что это действительно так, мы прежде всего должны постараться выяснить себе структуру физики как науки и посмотреть, в каком соотношении находятся теория и тот опытный материал, которым физика оперирует.

Конечно, мы не можем решать здесь вопроса о сущности физической науки во всей его полноте. Этот вопрос, относящийся к теории познания и крайне интересный как для физика, так и для философа, значительно более сложен, чем это может показаться на первый взгляд. В истории философской мысли он всегда занимал важное место. Но нам для нашей цели и нет надобности особенно сильно в него углубляться. Нам достаточно будет заняться только одной его стороной, хотя, правда, и здесь нам придется начать несколько издалека.

Не подлежит сомнению, что единственным средством, с помощью которого мы черпаем наши сведения об окружающем нас мире, являются наши органы чувств. Но единичные чувственные восприятия слишком мимолетны и неустойчивы, чтобы служить материалом для дальнейшей переработки. И вот человек выделяет и фиксирует в памяти те общие черты отдельных восприятий, которые повторяются и которые для него практически важны. Этот процесс, совершающийся совершенно непроизвольно, ведет к образованию того, что в логике называется понятиями.

В образовании понятий состоит первый шаг по пути познания природы. Они являются той базой, на которой строится дальнейшее. Но образованные таким образом первоначальные понятия обладают, как мне кажется, следующим свойством. Они не поддаются строгому определению. Мы все владеем понятием «свет». Но объяснить словами, определить один другому сущность этого понятия мы не можем. Чтобы научиться ему, нужно иметь глаза, нужно видеть, как освещается все нас окружающее при восходе солнца и как погружается опять во мрак при его заходе. Если быть прозаичнее, тому же можно научиться, включая и выключая электрическую лампочку. Но одно несомненно — слова, определения здесь бессильны. Попробуйте объяснить слепому от рождения, что такое свет.

Итак, одними словами первоначальным физическим понятиям научить нельзя. Вот почему, позвольте мне это здесь подчеркнуть, ни учебник, ни учитель недостаточны, чтобы научить физике. Учащийся должен хоть немного работать опытно сам. Он должен хоть поверхностно, но сам видеть, сам слышать, сам осязать те явления, о которых ему говорят.

Мы несколько отвлеклись в сторону. Вернемся к первым шагам по пути познания природы, к понятиям, непосредственно навязанным нам природой. По мере того, как человечество увеличивало свой запас навязанных опытом понятий (опытных знаний), все настоятельнее являлась потребность в их систематизации, без которой нет возможности разобраться в бесконечном обилии окружающих нас явлений. В этой систематизации громадную службу оказывает нам наша способность образовывать другого рода понятия, понятия более определенные, чем те, о которых шла речь выше, и менее зависящие от наших чувств. В первую очередь сюда относятся понятие о числе и те понятия, которыми оперирует математика. В области этих понятий, другими словами, в области математического мышления мы себя чувствуем несравненно более уверенно, чем при оперировании с материалом, непосредственно поставляемым нам нашими чувствами. При помощи математических понятий можно определенно формулировать посылки и так же определенно и легко делать из них выводы и заключения. И вот, зная за собой эту силу, человек старается — вначале инстинктивно, а затем с развитием науки и сознательно — приспособить математические понятия и специально понятие о числе к сырому опытному материалу, к понятиям физическим.

В этом процессе перехода от качественных соотношений к количественным заключается важнейший этап научной мысли. На нем основано как понятие об измерении, так и сам процесс измерения физических величин. Можно смело утверждать, что какая-нибудь область физических явлений вообще становится наукой только с того момента, когда мы научаемся вводить в нее измерения. Так, например, пока не было точного понятия температуры и не умели ее измерять, науки о теплоте почти или даже совсем не существовало.

Пользуясь в описанном смысле математикой, мы стараемся теперь найти систему в окружающих нас явлениях и облегчить себе их понимание тем, что ищем такие математические формулы в общем смысле слова, не непременно узко алгебраическом, которые охватывали бы возможно большее число единичных фактов или общую сторону различных явлений. Если такая формула найдена, то мы говорим, что нашли физический закон. Возьмем пример. Закон преломления света при переходе из одной прозрачной среды в другую гласит, как известно, так: падающий и преломленный лучи лежат в одной плоскости, и отношение между синусом угла падения и синусом угла преломления есть величина постоянная. Например, для воды и воздуха это отношение равно 1,33. Что представляет собой этот закон? Это — формула, охватывающая бесчисленное множество единичных случаев преломления. Она избавляет нас от необходимости делать в каждом отдельном случае опыт, она делает ненужным запоминать или заносить в таблицы для каждого отдельного случая угол падения и соответственный угол преломления луча. Зная закон преломления, вы уверены, что в любой момент, когда это вам понадобится, при помощи простейших вычислений вы сможете решить всякий представившийся в этом направлении вопрос.

По мере того как физические знания росли, по мере того как число найденных законов увеличивалось, все труднее и труднее становилось разобраться в их разнообразном обилии. Движимые опять необходимостью возможно лучше ориентироваться в этом громадном материале, люди старались найти такие картины, такие точки зрения, которые позволили бы объединить в одно целое отдельные законы. Так создавалась физическая теория или, вернее, теории.

Теория, таким образом, находится в таком же отношении к отдельным законам, в каком законы находятся к отдельным явлениям. Систематизирующая роль теории, конечно, не исчерпывает всей ее сущности, но все же, как вы видите, в систематизации наших знаний она имеет громадное значение. И тут математика является огромным подспорьем. Только что рассмотренные соотношения между различными сторонами физики и постепенное развитие их могут быть прослежены на любой физической теории. Очень просто это сделать, например, на оптике.

Оптика, между прочим, — одна из самых древних научно разработанных отраслей физики. Изучение оптических явлений уже в древности привело к установлению некоторых законов. Закон прямолинейного распространения света и закон отражения от зеркал были известны давно. Позже, в XVII в., был найден закон преломления. Смотря по тому, какая группа явлений подвергалась исследованию и с каких точек зрения к ним подходили, были устанавливаемы различные отрывочные законы. Были открыты явления дифракции света, интерференции и т. д. Но пока не было общей, объединяющей точки зрения, было чрезвычайно трудно разбираться во всей совокупности оптических явлений. Более того, отдельные законы, казалось, находились в противоречии друг с другом. Загибание света не вязалось, например, с прямолинейным распространением луча.

Так было до того, пока усилиями ряда гениальных физиков, из которых в первую очередь должны быть названы Гюйгенс и Френель, не удалось найти ту картину, которую мы теперь называем волновой теорией света и которая позволила объединить всю оптику в одно стройное целое. И все, что казалось сложно и противоречиво, сделалось простым и ясным.

А возьмите теорию всемирного тяготения Ньютона. Объединяя с гениальной смелостью столь разнородные на взгляд наших чувств явления, как падение камня и движение небесных светил, она грандиозна именно своей простотой. В одной простой формуле она содержит всю динамику всего мироздания.

Я ограничусь этими примерами. Может быть, в них осталось кое-что вам неясным. Это ничего. Понимание фактической стороны придет по мере того, как вы будете изучать физику, но я думаю, что для вас, по крайней мере в общих чертах, теперь выяснилось соотношение между ее опытной и теоретической сторонами.

Эти две стороны, как вы видели, тесно связаны между собой, они вместе представляют одно целое. В достижении нашей конечной цели — познания природы — могучим подспорьем, систематизирующим наш опыт и дающим возможность пользоваться материалом, является теория. Теория, а значит и орудие, которым, как мы видели, она пользуется —

математика, не являются балластом и чем-то искусственно пристегнутым к науке о природе. Нет, она есть то орудие, без которого мы не были бы в состоянии осилить окружающий нас мир как в практическом смысле, так и в смысле удовлетворения умственных потребностей.

Поэтому я нахожу — не считайте это парадоксом, — что нельзя требовать знания только опытной физики, но вовсе не потому, что это слишком мало, а потому, что это слишком трудно. Более или менее полное знание опытной физики без помощи теории человеку не под силу.

Изложенный взгляд на систематизирующую роль теории очень хорошо иллюстрируется одним красивым сравнением, сделанным Пуанкаре.

Пуанкаре сравнивает всю физику с огромной библиотекой. Отдельные опытные данные, отдельные явления — это те тома, из которых библиотека состоит. Теория — это каталог нашей библиотеки. Как без каталога библиотека, особенно большая, представляет собой лишь сборище книг, очень ценных книг, которыми в сущности продуктивно пользоваться нельзя, точно так же физика без теории не есть наука, а лишь довольно малоценный конгломерат отдельных фактов, разобраться в которых нет возможности.

А теперь нам будет уже нетрудно ответить на тот вопрос, который мы поставили себе вначале. Нужна ли инженеру физика в ее целом? Не достаточно ли ему знания отдельных, непосредственно для его практической работы нужных фактов? Ответ, мне кажется, ясен.

Чтобы продуктивно работать — позвольте мне говорить на языке сравнения Пуанкаре, — инженеру не достаточно прочесть и знать несколько книг из громадной библиотеки знания. Он должен быть знаком или, по крайней мере, уметь разбираться в каталоге всей библиотеки.

История техники знает немало примеров загадочных неуспехов, неуспехов повторных и имевших иногда весьма неприятные последствия. И очень часто оказывалось, что загадочность обусловливалась не присутствием действительно новых, до сих пор вообще неизвестных факторов, а отсутствием у тех, кто данными вопросами занимался, широкого физического горизонта. И когда за решение брались люди, обладавшие действительно широкими физическими знаниями, то загадка не только разъяснялась и находился способ предотвратить неуспех, но часто открывались и новые пути для дальнейшего прогресса.

Позвольте мне в заключение остановиться на одном примере, как мне кажется, иллюстрирующем значение широкого физического горизонта при разрешении технических вопросов.

Я имею в виду вопрос об оптических инструментах и, в частности, вопрос о микроскопе. Вы знаете, что микроскоп играет чрезвычайно важную роль в очень многих областях прикладного знания. Я не буду напоминать вам его значение в медицине, в гигиене, в санитарии. Я укажу только на то, что и в изучении металлов микроскоп в настоящее время незаменим. Микроскопом особенно заинтересовались уже в середине прошлого столетия, после того как применение его в биологии открыло совершенно новые пути в изучении явлений жизни. Но после первых успехов обнаружилось, что существовавшие тогда микроскопы не были хороши и не были сильны. Исследователи ясно чувствовали, что если бы удалось построить микроскоп с большим увеличением, то вместе с тем явилась бы возможность проникнуть еще дальше в сущность жизни. А такая перспектива всегда с особенной силой манила людей. И фантазия не останавливалась перед постройкой микроскопов, увеличивающих в десятки, сотни тысяч и миллионов раз, и ждали от их применения чудес. Исследователи ждали, что с их помощью можно будет проникнуть в самые сокровенные детали строения живой материи.

Понятно, что при такой конъюнктуре и специалисты-конструкторы оптических приборов взялись с усиленной энергией за усовершенствование микроскопа. И они считали принципиально возможным достигнуть любых увеличений. Весь вопрос, казалось, сводился к преодолению технических трудностей.

Дело в том, что в то время все расчеты, касавшиеся оптических приборов, велись исключительно при помощи так называемой геометрической оптики. В основании расчетов лежала та теория микроскопа, которая оперирует со световыми лучами как с прямыми линиями (и которая, впрочем, до сегодняшнего дня только и преподается в средней школе). А с точки зрения геометрической оптики действительно не существует принципиальной границы для возможного увеличения микроскопа.

Однако же весьма скоро обнаружилось, что работа, направленная к усовершенствованию микроскопа, далеко не дает тех результатов, которых, казалось, можно было ожидать. Между тем, что казалось достижимым, и тем, что достигалось, было противоречие, которому объяснения не находилось.

Так обстояло дело, когда иенский механик Цейсс, имевший небольшую механическую и оптическую мастерскую и изготовлявший сам недурные по тому времени микроскопы, пригласил в качестве консультанта тогда еще молодого физика Аббе. Аббе обладал хорошей теоретической подготовкой, хорошо владел теоретической оптикой. Он знал, что геометрическая оптика есть лишь удобная схема для обработки классического явления преломления. Он знал ей цену, потому что сам очень много внес нового в эту область. Но он знал также, что с точки зрения волновой теории света, служащей базой для геометрической оптики, последняя есть не более как приближение. И он сразу подошел к вопросу о микроскопе с широким, не связанным узкими рамками геометрической теории взглядом.

Результаты такого подхода к делу не заставили себя долго ждать Одним из главных результатов, к которым пришел Аббе, был следующий. Он показал, что волнообразная природа света ставит принципиальный предел тому полезному увеличению, которое может быть достигнуто при помощи микроскопа или, вообще, любого оптического инструмента. Если детали объекта мельче определенной величины или нормы, то эти детали не могут быть видимы, выявить их ни один микроскоп не может. Все мечты об увеличении в 100 000 и больше раз и все связанные с ними надежды должны быть принципиально оставлены, и работа тех, кто хотел такие микроскопы построить, совершенно бесцельна. Блестящими опытами Аббе подтвердил правильность своих теоретических выводов.

Позвольте мне на этом остановиться. Я надеюсь, что вы теперь согласитесь со мной, что знание, широкое, полное знание физики для инженера — не роскошь, а необходимость, что широкий физический горизонт должен быть достоянием не только тех отдельных избранных людей — инженеров, которым суждено прокладывать новые пути в технике, но и достоянием всякого инженера, сознательно относящегося к своему делу. Если то, что я сказал, может способствовать укреплению в вас этого взгляда, то моя цель была бы достигнута.

Но я не хотел бы закончить нашу сегодняшнюю беседу, не указав хоть двумя словами на еще одну сторону вопроса. Я хотел бы еще сказать вам, что занятия физикой, углубление в ее основы и в те широкие идеи, на которых она строится, и в особенности самостоятельная научная работа приносят огромное умственное удовлетворение. Убеждать в этом я не хочу. Да и вряд ли здесь возможно убеждение. Тут каждый должен убедиться сам. Но я хотел бы, чтобы вы знали, что если кто-нибудь из вас почувствует в себе такое стремление, то для меня всегда будет большим удовольствием способствовать всем, чем я могу, его осуществлению. В посильном удовлетворении таких чисто научных запросов учащихся я, помимо моих личных симпатий, вижу одну, и не последнюю, задачу высшей школы.

Л. Садовский, М. Аршинов

Двоичное кодирование

Как передают сообщения по линиям связи? Схема такой передачи представлена на рисунке.

Кодирующее устройство сопоставляет каждому передаваемому сообщению определенную комбинацию сигналов (приемлемую для передачи по данному каналу связи), называемую *кодом*. Операция перевода сообщения в последовательность различных сигналов называется *кодированием*, обратное преобразование, восстанавливающее по принятым сигналам переданное сообщение,— *декодированием*. Коды, использующие два различных элементарных сигнала, называются *двоичными*. В телеграфии, например, популярны двоичные коды Морзе и Бодо. В азбуке Морзе каждой букве сопоставляется определенная последовательность кратковременных (называемых *точками*) и длительных (*тире*) импульсов тока. В коде Бодо каждой букве сопоставляется определенная последовательность из пяти элементарных сигналов — импульса и паузы.

Процесс кодирования, коды различных типов, требования, предъявляемые к ним, и многие смежные проблемы изучает теория информации и кодирования. В ней сочетаются вероятностные, алгебраические и комбинаторные методы.

Здесь мы останавливаемся лишь на некоторых частных вопросах кодирования, а заинтересовавшихся читателей отсылаем к специальным книгам — например, А. М. Яглом и И. М. Яглом «Вероятность и информация» (М., «Наука», 1973), У. Питерсон «Коды, исправляющие ошибки (М., «Мир», 1964), У. Питерсон, Э. Уэлдон «Коды, исправляющие ошибки (М., «Мир», 1976).

Спрашиваем — отвечаем

В основе двоичного кодирования лежит очень простой принцип. Разъясним его на такой задаче.

Некто задумал число, заключенное между 0 и 7. Угадывающему разрешено задавать вопросы, ответы на которые даются лишь в форме «да» или «нет». Каким наименьшим числом вопросов можно обойтись, чтобы наверняка узнать задуманное число?

Самый бесхитростный путь (так, наверное, поступил бы ребенок) — перебирать числа наугад, надеясь на

удачу. При очень сильном везении может хватить и одного вопроса, но если не повезет, то может понадобиться целых семь. Поэтому оставим надежду на мгновенную удачу и постараемся построить такую систему вопросов, чтобы любой из ответов на них — «да» или «нет» — давал нам одинаковую (пусть хотя и неполную) информацию о задуманном числе, а число вопросов было минимальным. Например, первый вопрос может быть таким: «Заключено ли задуманное число в пределах от 0 до 3?». Оба ответа — и «да» и «нет» — одинаково приближают нас к цели: в обоих случаях остаются четыре возможности для неизвестного числа (первоначально их было восемь).

Если на первый вопрос получен утвердительный ответ, то во второй раз можно спросить: «Не является ли задуманное число нулем или единицей?»; если же ответ был отрицательным, спросим: «Не является ли задуманное число четверкой или пятеркой?»

В любом случае после ответа на второй вопрос останется выбор из двух возможностей. Для того чтобы осуществить этот последний выбор, достаточно одного вопроса. Итак, для угадывания задуманного числа, каким бы оно ни было, достаточно трех вопросов.

Если каждый из двух возможных ответов «да» или «нет» обозначить условно символами «0» и «1», то ответ запишется в виде последовательности, состоящей из 0 и 1. Так, например, если в разобранном выше примере задуманное число было нулем, то на каждый из трех вопросов ответом будет «да». Трем «да» соответствует последовательность 000.

Если было задумано число «3», то ответами будут: да, нет, нет. То есть «тройке» соответствует последовательность: 011. По результатам ответов можно составить таблицу 1, приведенную ниже. Тот из вас, кто знаком с двоичной системой счисления, узнает в нижней строке двоичную запись соответствующих чисел верхней строки.

Заметим, что вместо множества чисел от 0 до 7 можно рассматривать любое множество из восьми сообщений, и каждое из них мы можем за-

Таблица 1

Задуманное число	0	1	2	3	4	5	6	7
Ответы	000	001	010	011	100	101	110	111

кодировать последовательностями из 0 и 1 длины 3. Последовательностями из нулей и единиц можно закодировать любое конечное множество сообщений.

Действительно, двоичных последовательностей длины 3 ровно $2^3 = 8$ (все они приведены в таблице), двоичных последовательностей длины 4 вдвое больше — их $2^4 = 16$. Вообще, число двоичных последовательностей длины n равно 2^n. Поэтому, если требуется закодировать нулями и единицами, к примеру, 125 сообщений, то для этого с лихвой хватит двоичных последовательностей длины 7 (их в нашем распоряжении $2^7 = 128$). Наконец, для закодирования любого числа M сообщений можно использовать двоичные последовательности длины n такой, что $2^n \geqslant M$.

Код Фано

Всегда ли выгодно кодировать сообщения словами одинаковой длины так, как мы это делали выше?

Представим себе, что одни сообщения приходится передавать довольно часто, другие — сравнительно редко, третьи — совсем в исключительных случаях. Довольно понятно, что первые лучше закодировать короткими словами, оставив более длинные слова для кодирования сообщений, появляющихся реже.

В математике мерой частоты появления того или иного события является его вероятность. Тот, кто не знаком с этим понятием, может представлять себе вероятность некоторого события (сообщения) как долю тех случаев, в которых оно появляется, от общего числа рассматриваемых событий (сообщений) *). Вероятность события A обозначают $P(A)$.

Пусть четыре сообщения A_1, A_2, A_3, A_4 имеют вероятности

$$P(A_1) = \frac{1}{2}, \quad P(A_2) = \frac{1}{4}, \quad P(A_3) = P(A_4) = \frac{1}{8}.$$

*) См., например, указанную выше книгу А. Яглома и И. Яглома.

Это означает, что среди, например, 1000 переданных сообщений около 500 раз появляется сообщение A_1, около 250 — сообщение A_2 и примерно 125 раз — каждое из сообщений A_3 и A_4.

Эти сообщения нетрудно закодировать двоичными словами длины 2, как показано в таблице:

Таблица 2

A_1	A_2	A_3	A_4
00	01	10	11

При этом вероятность их появления никак не учитывается. Поступим теперь иначе. Разобьем сообщения на две равновероятностные группы: в первую попадает сообщение A_1, во вторую — A_2, A_3, A_4. Сопоставим первой группе символ «0», второй группе — символ «1». Это вполне в духе принципа, применявшегося в задаче с угадыванием. Действительно, символ «0» соответствует ответу «да» на вопрос «Принадлежит ли сообщение первой группе?», а «1» — ответу «нет». Разница лишь в том, что раньше все множество разбивалось на две группы, состоящие из одинакового числа элементов, теперь — из разного. Но, как и раньше, разбиение это таково, что оба ответа «да» и «нет» равновозможны. Продолжая в таком же духе, разобьем множество сообщений A_2, A_3, A_4 снова на две равновероятностные группы. Первой, состоящей из одного сообщения A_2, сопоставляем символ 0, второй, в которую входят сообщения A_3 и A_4,— символ 1. Наконец, оставшуюся группу из двух сообщений разобьем на сообщения A_3 и A_4, сопоставив первому символ 0, второму — 1 (они равновероятны). Процесс закончен. Сообщение A_1 на первом шаге образовало «самостоятельную» группу, и ему был сопоставлен символ 0, он и кодирует это сообщение. Сообщение A_2 образовало самостоятельную группу за два шага, на первом шаге ему соответствовал символ 1, на втором — 0; значит, сообщение A_2 кодируется словом 10. Аналогично, для сообщений A_3 и A_4 имеем, соответственно, последовательности 110 и и 111. Итак, мы получаем следующую кодовую таблицу:

Таблица 3

A_1	A_2	A_3	A_4
0	10	110	111

Именно такой способ кодирования предложил Фано. Возникает вопрос, что же мы выиграли по сравнению с равномерным кодом, применив код Фано? Чтобы ответить на него, представим, что непрерывным потоком передаются сообщения A_1, A_2, A_3, A_4 — всего 1000 сообщений. Посчитаем, сколько потребуется потратить двоичных символов для их передачи при первом и втором способе кодирования.

При использовании равномерного кода это посчитать нетрудно: на каждое сообщение — два символа, значит, в общей сложности 2000 символов.

Пусть теперь используется код Фано. Вспомним, что из 1000 сообщений примерно 500 раз появляется первое, которое кодируется всего одним символом (500 символов), 250 раз — сообщение A_1, оно кодируется двумя символами (еще 500), на сообщении A_3 и A_4, появляющиеся примерно 125 раз, придется потратить еще $3 \times 250 = 750$ символов. Итого нужно передать примерно 1750 символов. Выигрыш? Конечно. Ведь во втором случае передача займет меньшее время. Можно представить себе ситуации, когда выигрыш от применения кода Фано окажется еще значительнее, чем в приведенном примере.

Доверяй, но проверяй

Мы установили, что любое конечное множество сообщений можно закодировать кодовыми словами из 0 и 1 (*двоичными* кодовыми словами). Беда в том, что при передаче закодированных сообщений возможны ошибки. Как правило, не в нашей власти полностью устранить источник ошибок. Как же тогда уберечься от их влияния и возможно ли это вообще? А если возможно, то какой ценой?

Оказывается, такие возможности — обнаруживать ошибки и даже их исправлять — имеются. Но неизбежной платой за это является удлинение кодовых слов, то есть добавление некоторого числа символов. Эти символы уже не несут информации о передаваемых сообщениях, но могут дать информацию о происшедших при передаче ошибках. Иными словами, их назначение — контролировать правильность передачи кодового слова. Вводимые дополнительные символы так и называют *контрольными* (или *проверочными*).

Всего одна проверка

Минимальная дань — добавить к каждому кодовому слову лишь один проверочный символ. Разберемся, на что мы можем рассчитывать в этом случае. Пусть $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ — двоичное кодовое слово (α_i — 0 или 1). По всей видимости, контрольный символ α_{n+1} выгодно выбрать так, чтобы на его значение влиял каждый символ кодового слова. Самое простое — положить $\alpha_{n+1} = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \pmod 2$ *). Эта запись означает, что проверочный символ α_{n+1} равен нулю, если в кодовом слове $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ содержалось четное число единиц, и единице — в противном случае. Например, присоединяя такой проверочный символ к слову 1010, получаем слово 10100; соответственно, из слова 1110 получим 11101.

Заметьте, что все удлиненные кодовые слова $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n\alpha_{n+1}$ содержат четное число единиц, то есть

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \alpha_{n+1} = 0 \pmod 2. \quad (1)$$

Представим себе, что в процессе передачи в удлиненное кодовое слово $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n\alpha_{n+1}$ вкралась одна ошибка (или даже любое нечетное число оши-

*) О сложении «по модулю» можно прочитать в статье Н. Виленкина «Сравнения и классы вычетов» («Квант», 1978, № 10).

бок). Тогда в искаженном слове $\alpha'_1\alpha'_2 \ldots \alpha'_n\alpha_{n+1}$ число единиц станет нечетным. Это и служит индикатором того, что в принятом слове содержится ошибка. Разумеется, нам не надо скрупулезно подсчитывать число единиц, достаточно лишь проверить, выполняется ли для символов принятого слова равенство (1),— это легко сделает простейшее вычислительное устройство. Если равенство (1) выполняется, считаем, что сообщение передано правильно, в противном случае констатируем, что произошла ошибка, и, если это возможно, требуем повторения передачи кодового слова. Но самостоятельно исправить ошибку мы не сможем. Например, если принято «неправильное слово» 11100, то возможно, что было послано любое из кодовых слов:

01100; 10100; 11000; 11110; 11101.

Каждый из перечисленных случаев соответствует одиночной ошибке. Ошибки могли произойти также в трех или даже в пяти символах. Гораздо хуже, если произошла двойная ошибка или вообще четное число ошибок. Ведь тогда соотношение (1) не нарушится, и мы воспримем искаженное слово как верное, в результате будет принято ложное сообщение.

Описанный код (его называют *кодом с общей проверкой на четность*) позволяет, следовательно, обнаружить любое нечетное число ошибок, но приводит к неверному декодированию, если ошибок четное число. Его выгодно применять поэтому, когда достаточно велика вероятность одиночной ошибки и очень мало вероятны ошибки в большем числе символов.

Гораздо чаще применяют коды с несколькими проверочными символами — это позволяет не только обнаруживать, но и исправлять ошибки, и не только одиночные, но и кратные.

Самый медленный код

Простейший прием, позволяющий исправлять ошибки, состоит в том, что каждый информационный символ повторяется несколько раз так, что символы 0 и 1 кодируются блоками, состоящими из n нулей (соответственно, n единиц). При декодировании n-буквенного блока, содержащего, быть может, ошибочные символы, принимается решение «большинством голосов». Если в принятом блоке нулей больше, чем единиц, то он декодируется как 00 ... 0, в противном случае — как 11 ... 1. Такое правило декодирования позволяет верно восстановить посланные символы, если помехи в канале искажают меньше половины символов в каждом передаваемом блоке. Если длину блока n выбрать достаточно большой, то мы практически обезопасим себя от возможных ошибок, однако передача сообщений будет идти черепашьими темпами.

Код с общей проверкой на четность и код с повторением — два антипода. Первый очень быстр, но зачастую «легкомыслен». Возможности второго исправлять ошибки теоретически безграничны, но делает он это чересчур медленно.

Из соображений, высказанных ранее, можно усмотреть, что для исправления ошибок нужно, чтобы используемые для кодирования слова достаточно сильно отличались друг от друга. В этом случае после возможных при передаче ошибок они скорее всего останутся различными, и искажения не помешают нам «угадать» посланное слово.

Необычное обычное расстояние

Мы подошли к понятию расстояния между кодовыми словами. *Расстоянием* (точнее, *расстоянием Хемминга*) $\rho(x, y)$ между двумя кодовыми словами x, y называют число символов, в которых они отличаются. Например, расстояние между словами 1010111 и 0110010 равно 4 — они отличаются символами на 1-м, 2-м, 5-м и 7-м местах.

Термин «расстояние» для величины $\rho(x, y)$ оправдан тем, что она обладает основными свойствами обычного расстояния между точками на плоскости или в пространстве (п. 4 в «Геометрии 6» или п. 132 в «Геометрии 8»).

Важной характеристикой корректирующих способностей кода является его *кодовое расстояние* d, которое определяется как минимальное расстояние между различными кодовыми словами $\min\limits_{x \neq y} \rho(x, y)$.

Ясно, что м чебольше кодовое расстояние, тем большими исправляющими способностями обладает данный код. Мы можем сформулировать этот факт более точно:

Чтобы код исправлял любые комбинации из t (и меньшего числа) ошибок, необходимо и достаточно, чтобы его кодовое расстояние было больше $2t$.

Действительно, если это так, то $\rho(x, y) \geqslant 2t + 1$ для любых кодовых слов x и y. Если в результате искажений оба слова перешли в одно слово z (т. е. стали неразличимыми), то (в силу одного из свойств расстояния — аксиомы треугольника)

$$\rho(x, z) + \rho(z, y) \geqslant \rho(x, y) \geqslant 2t + 1,$$

и следовательно, либо $\rho(x, z) > t$, либо $\rho(z, y) > t$. Значит, любые ошибки в t или меньше символах любых кодовых слов x и y оставляют их еще различимыми, и поэтому можно восстановить оригинал. Еще проще доказывается обратное утверждение.

Задачи

1. Имеется 8 двоичных кодовых слов длины 3. Их можно изобразить в пространственной системе координат как вершины куба со стороной 1. Каков в этом случае «геометрический смысл» расстояния между кодовыми словами?

2. Доказать, что максимальный двоичный код длины 5 (то есть код, у которого все кодовые слова имеют длину 5) с кодовым расстоянием, равным 3, содержит 4 кодовых слова. Указать такой код.

3. Существует ли код длины 20, содержащий 1000 кодовых слов и исправляющий любые комбинации из трех или менее ошибок?

4. Доказать, что для о б н а р у ж е н и я s (или меньшего числа) ошибок необходимо и остаточно, чтобы кодовое расстояние d удовлетворяло неравенству $d \geqslant s + 1$.

5. Доказать, что для и с п р а в л е н и я t (и меньшего числа) ошибок и вместе с этим о б н а р у ж е н и я s (и меньшего числа) ошибок ($s \geqslant t$) необходимо и достаточно, чтобы кодовое расстояние удовлетворяло неравенству $d \geqslant t + s + 1$.

Код Хемминга

Пусть количество сообщений, которые требуется передавать абоненту, равно 16. Для их кодирования можно использовать слова длины 4, но тогда код не будет корректировать ошибки. Мы уже знаем, что при использовании слов длины 5 можно обнаружить любую одиночную ошибку в кодовом слове, но, увы, нельзя ее исправить. Двух добавочных символов тоже оказывается недостаточно для исправления одиночных ошибок (убедитесь в этом самостоятельно).

А вот тремя добавочными символами можно распорядиться так, чтобы выявить и исправить любую о д и н о ч н у ю ошибку.

Предположим, что нам удалось указать 16 кодовых слов длины семь — $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7$, для которых по модулю два выполнены следующие равенства:

$$\begin{cases} S_1 = \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 = 0, \\ S_2 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_6 + \alpha_7 = 0, \\ S_3 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_7 = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Тогда разряд, в котором допущена одиночная ошибка, указывается числом с двоичной записью $S_1S_2S_3$ (напомним, что каждое S_i — это 0 или 1). В частности, для кодовых слов это число равно 0 (= 000), что указывает на отсутствие разряда с ошибкой.

Сделанное утверждение вытекает из того, что при нашем кодировании (т. е. при нашем наборе кодовых чисел) для двоичного слова длины 7 с о д и н о ч н о й ошибкой $S_1 = 1$ тогда и только тогда, когда эта ошибка допущена в четвертом, пятом, шестом или седьмом разрядах (см. (2)), $S_2 = 1$ тогда и только тогда, когда ошибка — во втором, третьем, шестом или седьмом разрядах, и $S_3 = 1$ — когда в первом, третьем, пятом или седьмом.

Пусть, например, $S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 1$. Тогда ошибка — в одном из четырех последних разрядов ($S_1 = 1$), но в двух последних разрядах ошибки нет ($S_2 = 0$); значит, ошибка — в четвертом или пятом разрядах; поскольку $S_3 = 1$, она — в п я т о м разряде, но $S_1S_2S_3 =$

$=101$ как раз и есть двоичная запись числа 5. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Осталось отыскать 16 кодовых слов, удовлетворяющих соотношениям (2). Для этого достаточно заметить, что, если α_1, α_2, α_3 и α_4 выбраны произвольно и по mod 2 выполняются равенства

$$\begin{cases}\alpha_5=\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4,\\ \alpha_6=\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4,\\ \alpha_7=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4,\end{cases}$$

то соотношения (2) верны.

Изученный здесь код — это *код Хемминга* длины 7 с четырьмя информационными символами.

В общем случае кодовые слова двоичного кода Хемминга, позволяющего исправить одиночную ошибку, имеют длину 2^m-1. Для определения положения ошибки тогда уже нужно m проверок, т. е. m проверочных символов. Оставшиеся 2^m-1-m символов являются информационными. Значения m проверок, как и выше, образуют двоичный номер положения ошибок.

Задачи

6. Определить положение одиночной ошибки в слове (1100011) кода Хемминга длины 7.

7. Построить систему проверок для кода Хемминга длины 15. Сколько кодовых слов содержит этот код?

8. К проверкам кода Хемминга длины 7 добавим еще одну проверку

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7=0. \quad (3)$$

Сколько слов удовлетворяет указанной проверке и проверкам (2)?

9. Доказать, что код, удовлетворяющий проверкам (2) и (3), позволяет не только исправлять одиночные, но и одновременно обнаруживать двойные ошибки.

10. К кодовым словам кода Хемминга длины 7 добавим еще один символ α_0 и к проверкам (2) — еще одну проверку

$$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7=0. \quad (4)$$

Доказать, что полученный код имеет 16 кодовых слов и позволяет исправить любую одиночную ошибку и обнаружить любую двойную ошибку в кодовом слове.

11. Верно ли аналогичное утверждение для кода Хемминга длины 2^m-1?

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

В этом номере мы публикуем фамилии читателей, приславших правильные решения задач М516 — М530, Ф523 — Ф532 (жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

К. Абдухаликов (Алма-Ата) **16—18**, **19а**), **20**, **21**, **26—28**; *Е. Абрамочкин* (Куйбышев) **16а**); *И. Аветисян* (с. Мулки АрмССР) **18**; *О. Авраамова* (Москва) **21**; *А. Агаев* (с. Покровка АзССР) **16б**), **21**, **22**, **24**, **26**; *С. Азнабаев* (Новотроицк Оренбургской обл.) **26**; *В. Айриян* (Раздан) **16а**), **б**) **18**, **20**, **22**, **24**, **26**, **27**; *З. Алавердян* (Иджеван) **26**; *В. Алиев* (Тбилиси) **26**; *В. Андрусевич* (Кобрин) **28**; *Р. Ардан* (Львов) **28**; *К. Аротамян* (Кафан) **26**; *Н. Арутюнов* (Киев) **28**; *А. Ахметхозин* (Андижан) **27**; *А. Ашкинази* (Москва) **16—19**; *Д. Бабарыкин* (Магнитогорск) **16а**); *А. Бадалян* (пос. Берд АрмССР) **16**, **21—23**, **26—28**, **30а**); *Б. Байсакалов* (Алма-Ата) **16б**), **18**, **19**, **21**, **24**, **26—29**; *А. Балинский* (с. Дубляны Львовской обл.) **16**, **18**, **19**, **21—24**, **26—28**, **30**; *И. Баранец* (пос. Дзержинский Московской обл.) **26—28**; *А. Барвинок* (Ленинград) **28**, **29**; *А. Барг* (Николаев) **16а**; **б**); *Б. Бегун* (Москва) **16**, **21**; *А. Белоусов* (Калининград Московской обл.) **26**; *С. Беспамятных* (Артемовский Свердловской обл.) **19а**), **24**, **27**, **28**; *В. Бобов* (Ленинград) **26**; *Н. Бовсуновский* (с. Путиловичи Житомирской обл.) **21**; *Т. Болотников* (Харьков) **16**, **18**, **19а**), **21**, **26**, **28**, **29**, **30а**); *А. Боричев* (Ленинград) **19**, **26—28**; *В. Боровко* (Новополоцк) **26**; *И. Бородин* (Соликамск) **22**, **23**; *О. Бохонов* (Москва) **21**, **22**, **23б**), **24**, **26**, **27**, **30а**); *А. Брагинский* (Воронеж) **24**; *А. Бурин* (Москва) **28**; *А. Васильев* (Саратов) **16а**), **21**, **26**, **28**, **30а**); *С. Великович* (Минск) **28**; *В. Виноградов* (Москва) **16**, **18**, **19а**), **21**, **22**, **23а**), **24**, **26—28**, **30а**); *А. Воронов* (Москва) **16**; *А. Габович* (Харьков) **26**; *Э. Гаджиларов* (Тбилиси) **26—28**; *А. Галенко* (Москва) **16а**), **б**), **26**; *Э. Галстян* (с. Айгезард АрмССР) **18**; *Н. Гасилов* (Баку) **26**; *К. Гедалин* (Тбилиси) **26**; *А. Гильман* (Москва) **16**, **18**, **19**, **21**, **22**, **24**, **26—28**; *Л. Гитлин* (Витебск) **16а**), **б**), **21**, **23**; *М. Гладина* (В. Волочек) **21**; *Ю. Глухов* (Щелково) **16б**), **18**, **21**, **28**; *А. Головин* (Москва) **21**; *О. Гордиенко* (Павлодар) **16а**), **21**, **22**, **27**; *М. Горелов* (Белорецк) **16**, **18**, **19**, **26**, **28**, **30а**); *Г. Грабарник* (Ташкент) **26**, **27**, **29**, **30а**; *Г. Грабужик* (Ташкент) **16**, **18—24**; *П. Григорук* (Гайворон) **21**, **24**; *Н. Гринберг* (Киев) **26**, **28**; *Л. Гройсман* (Харьков) **28**; *В. Губа* (Вологда) **16**, **18—21**, **24—29**;

(Продолжение см. с. 32)

Не только игрушка

Наверное, как и большинство читателей «Кванта», вы уже перестали играть в детские игрушки. Все же мы вам предлагаем повозиться... с конструктором *). Игрушка, о которой идет речь, состоит из одинаковых гибких прямоугольных панелек; в двух противоположных углах каждой из них имеются отверстия, а в двух других — штырьки (рис. 1), что позволяет соединять панельки друг с другом. В руках любителя математики этот конструктор становится прекрасным средством для сборки моделей поверхностей.

Зададим произвольные p и q ($\geqslant 3$) и начнем соединять детали, заботясь лишь о том, чтобы их короткие стороны ограничивали q-угольники (эти q-угольники, хотя это несколько непривычно, мы будем называть *вершинами*), а длинные стороны образовывали p-угольники (p-угольники мы будем называть *гранями*, а сами детали — *ребрами*). Полученные таким образом конструкции назовем *мозаиками*.

Пример такого соединения с $p=6$, $q=3$ изображен на рисунке 2. При значениях $\langle p, q\rangle$, равных $\langle 6, 3\rangle$, $\langle 3, 6\rangle$, $\langle 4, 4\rangle$ (рис. 2—4), мы получим заполнения плоскости правильными p-угольниками, при которых *в каждой вершине* сходится по q *граней*. Пока мы получили только плоские мозаики **). При других p и q мозаики выходят в пространство. Если собрать мозаики типов $\langle 5, 3\rangle$, $\langle 3, 4\rangle$, $\langle 3, 5\rangle$, $\langle 4, 3\rangle$ и $\langle 3, 3\rangle$, то получатся «раздутые» каркасные модели правильных многогранников: додекаэдра, октаэдра, икосаэдра (рис. 5), куба и (правильного) тетраэдра, (§ 54 «Геометрии 10»). Эти мозаики называются *сферическими*.

Рис. 1.

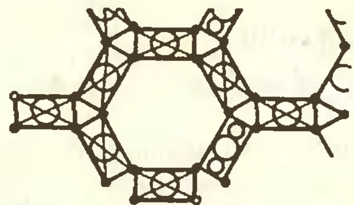


Рис. 2.

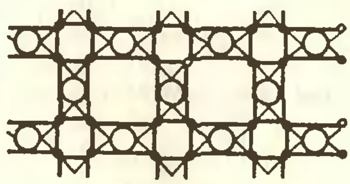


Рис. 3.

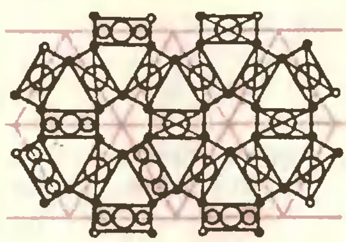


Рис. 4.

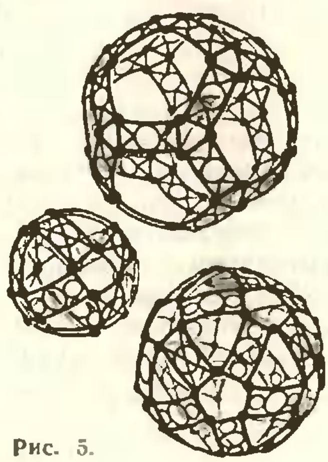


Рис. 5.

Возьмем теперь $\langle p, q\rangle = \langle 3, 7\rangle$ (рисунок на четвертой странице обложки). При сборке мы увидим, что конструкция «не желает быть плоской», но и не округляется как сферическая мозаика: получающаяся поверхность искривляется так, что каждый ее участок принимает седлообразную форму. При этом в принципе мы можем продолжать построение неограниченно (в отличие от сферического, но подобно плоскому случаю); правда, рано или поздно конструкция изгибается настолько, что натыкается сама на себя, и дальнейшая сборка возможна только, если допустить самопересечение.

Поверхность Π, часть которой мы смоделировали, называется *псевдосферой*. Оказывается, если расстоянием между двумя точками A, $B \in \Pi$ назвать расстояние между ними, *измеренное вдоль этой поверхности*, то на Π будут выполняться аксиомы геометрии Лобачевского. Таким образом, можно сказать, что всевдосфера есть модель плоскости Лобачевского. Мозаика $\langle 3, 7\rangle$ — один из простейших паркетов на ней.

Еще одно замечательное свойство этой модели: ее можно заставить скользить саму по себе, практически не деформируя ребер, при этом любую вершину можно перевести в любую другую вершину! Иначе говоря, наша мозаика допускает самосовмещения. Аналогичным свойством, очевидно, обладают плоские и сферические мозаики: их самосовмещения — это просто перемещения плоскости и, соответственно, повороты сферы. Напротив, тор на первой странице обложки этим свойством не обладает.

В заключение предлагаем следующую задачу: докажите, что плоские мозаики характеризуются условием $(p-2)(q-2)=4$, а сферические — $(p-2)(q-2)<4$, и перечислите все мозаики этих типов.

В. Дубровский

*) Этот конструктор выпускается в Белоруссии и Эстонии и поступает в магазины детских игрушек в крупных городах.

**) Эти мозаики являются правильными паркетами («Квант», 1979, № 2, с. 9).

задачник Кванта

Задачи

М571—М575; Ф583—Ф587

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 октября 1979 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 7—79» и номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М571, М572» или «Ф583». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации (или цикла задач), присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи этого номера предлагались на заключительном туре последней Всесоюзной олимпиады.

Числа в скобках обозначают класс, в котором предлагались задачи.

М571. Убывающая последовательность (x_n) положительных чисел такова, что при любом натуральном n

$$\frac{x_1}{1}+\frac{x_4}{2}+\frac{x_9}{3}+\ldots+\frac{x_{n^2}}{n}\leqslant 1.$$

Докажите, что при любом натуральном n

$$\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{3}+\ldots+\frac{x_n}{n}<3. \qquad (10)$$

З. Чантурия

М572. Кенгуру прыгает по углу $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ координатной плоскости Oxy следующим образом: из точки $(x;\ y)$ кенгуру может прыгнуть в точку $(x+1;\ y-1)$ или в точку $(x-5;\ y+7)$, причем прыгать в точки, у которых одна из координат отрицательна, не разрешается. Из каких начальных точек $(x;\ y)$ кенгуру не может попасть в точку, находящуюся на расстоянии больше 1000 от начала координат? Нарисуйте множество всех таких точек $(x;\ y)$ и найдите его площадь. (8)

А. Кушниренко, А. Сосинский

М573. Через точку O а) на плоскости; б) в пространстве проведено 1979 прямых, никакие две из которых не перпендикулярны друг другу. На прямой l_1 взята произвольная точка A_1, отличная от O. Докажите, что можно выбрать на каждой из остальных прямых по точке $A_i\in l_i$ ($i=2, 3, \ldots$ ..., 1979) так, чтобы следующие 1979 пар прямых были взаимно перпендикулярны:

$$(A_1A_3)\perp l_2,\ (A_2A_4)\perp l_3,\ \ldots,\ (A_{i-1}A_{i+1})\perp l_i,\ \ldots,$$
$$(A_{1977}A_{1979})\perp l_{1978},\ (A_{1978}A_1)\perp l_{1979},$$
$$(A_{1979}A_2)\perp l_1. \qquad (9)$$

Б. Агафонов

М574*. Конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots$ ..., a_n из чисел 0 и 1 должна удовлетворять следующему условию: для любого целого k от 0 до $n-1$ сумма

$$a_1a_{k+1}+a_2a_{k+2}+\ldots+a_{n-k}a_n$$

является нечетным числом.

а) Придумайте такую последовательность для $n=25$.

б) Докажите, что такая последовательность существует для некоторого $n>1000$. (9)

С. Конягин

М575*. На прямой по порядку расположены точки A_0, A_1, A_2, ..., A_n так, что длины отрезков A_0A_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$ не превосходят 1. Требуется отметить $k-1$ из точек A_1, A_2, ..., A_{n-1} красным цветом так, чтобы длины любых двух из k частей, на которые отрезок A_0A_n разбивается красными точками, отличались не более, чем на 1. Докажите, это всегда можно сделать:

а) для $k=3$,

б) для каждого натурального $k<n$. (10)

В. Гринберг, В. Гальперин

Ф583. Наблюдатель движется с постоянной скоростью вдоль некоторой наклонной прямой. Брошенное под углом к горизонту тело пересекает траекторию наблюдателя дважды с интервалом времени τ. Оба раза тело находится впереди наблюдателя на одном и том же расстоянии от него. Как выглядит с точки зрения наблюдателя траектория тела?

После второго пересечения наблюдатель измеряет пути, пройденные телом за последовательные равные промежутки времени длительностью τ. Найдите отношение этих путей. (8)

М. Кицай

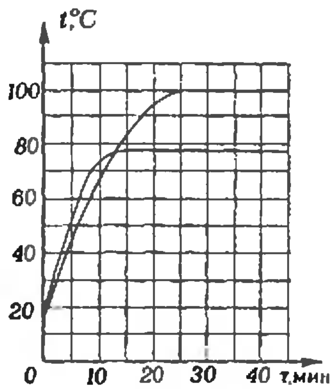


Рис. 1.

Ф854. В небольшую тонкостенную металлическую кастрюлю налили 0,5 л воды, поставили кастрюлю на плиту и, измеряя температуру воды в различные моменты времени, построили график зависимости температуры от времени. Затем воду вылили, в кастрюлю налили 0,7 кг спирта и, поставив кастрюлю на ту же самую плиту, построили график зависимости температуры спирта от времени. Оба графика приведены на рисунке 1. Пользуясь этими графиками, определите удельную теплоемкость спирта и удельную теплоту его парообразования, если за 30 минут кипения количество спирта в кастрюле уменьшилось вдвое. Теплоемкость кастрюли 200 Дж/К. Испарением с поверхности жидкости пренебречь. (9, 10)

И. Слободецкий

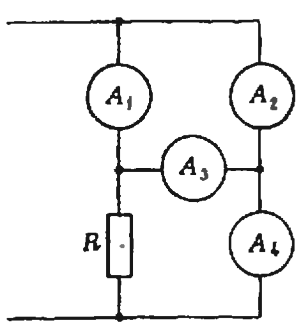


Рис. 2.

Ф585. Четыре одинаковых амперметра и резистор включены так, как показано на рисунке 2. Амперметр A_1 показывает 2А, амперметр A_2 показывает 3А. Какие токи протекают через амперметры A_3, A_4 и резистор? Найдите отношение внутреннего сопротивления амперметра к сопротивлению резистора. (8, 9)

В. Скороваров

Ф586. Теплоизолированный сосуд откачан до глубокого вакуума. Окружающий сосуд одноатомный идеальный газ имеет температуру T_0. В некоторый момент открывают кран, и происходит заполнение сосуда газом. Какую температуру T будет иметь газ в сосуде сразу после его заполнения? (9)

Е. Бутиков

Ф587. Проводник массы M и длины l подвешен к диэлектрику за концы с помощью двух одинаковых проводящих невесомых пружин с общим коэффициентом жесткости k. К верхним концам пружин подсоединен конденсатор емкости C. Вся конструкция висит в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, перпендикулярной плоскости конструкции.

Проводник смещают в вертикальной плоскости из положения равновесия и отпускают. Определить дальнейшее движение проводника в вертикальной плоскости. Сопротивлением, собственной индуктивностью и емкостью проводников пренебречь. (10)

Д. Футорский

Решения задач

М517—М519; Ф526, Ф530—Ф532.

М517. *В окружность радиуса R вписан n-угольник площади S. На каждой стороне n-угольника отмечено по точке. Докажите, что периметр n-угольника с вершинами в отмеченных точках не меньше $2S/R$.*

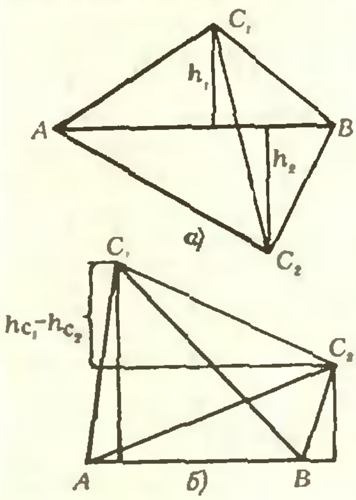


Рис. 1.

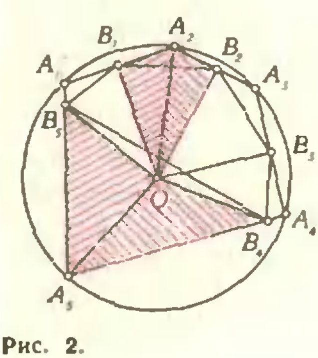


Рис. 2.

Нам понадобится следующая простая лемма: *пусть треугольники ABC_1 и ABC_2 имеют общее основание $[AB]$ длины R; тогда*

1) *если вершины C_1 и C_2 лежат по разные стороны от $[AB]$, то*

$$S_{ABC_1}+S_{ABC_2}\leqslant\frac{1}{2}R\cdot|C_1C_2| \quad (\text{рис. 1, } a);$$

2) *если вершины C_1 и C_2 лежат по одну сторону от $[AB]$, то*

$$|S_{ABC_1}-S_{ABC_2}|\leqslant\frac{1}{2}R\cdot|C_1C_2| \quad (\text{рис. 1, } б).$$

Докажите эту лемму самостоятельно.

Приступим теперь к решению задачи. Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ — n-угольник, вписанный в окружность с центром O; $B_1B_2\ldots B_n$ — второй n-угольник (с вершинами в отмеченных точках), причем $B_1\in[A_1A_2]$, $B_2\in[A_2A_3]$ и т. д.; пусть P — его периметр. Рассмотрим треугольники OA_1B_1, OB_1A_2, OA_2B_2, …, OB_nA_1. Если центр окружности O принадлежит многоугольнику $A_1A_2\ldots A_n$, то эти треугольники попарно не перекрываются и их объединение дает весь многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ (рис. 2), так что площадь S многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ равна сумме площадей этих треугольников. Согласно лемме сумма площадей двух таких треугольников с общим основанием $[OA_k]$ не превосходит $\frac{1}{2}|OA_k|\cdot|B_{k-1}B_k|=\frac{1}{2}R\cdot|B_{k-1}B_k|$ (мы считаем, разумеется, $B_0=B_n$), так что

$$S=(S_{OB_1A_2}+S_{OA_2B_2})+\ldots+(S_{OB_nA_1}+S_{OA_1B_1})\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}R\,(|B_1B_2|+\ldots+|B_nB_1|)=\frac{1}{2}RP, \quad (1)$$

откуда $P\geqslant 2S/R$.

Если же центр O лежит вне многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$, скажем, по разные с ним стороны от хорды A_nA_1 (рис. 3), то тогда площади треугольников OA_nB_n и OB_nA_1 входят в сумму, образующую площадь S, со знаком минус:

$$S=(S_{OB_1A_2}+S_{OA_2B_2})+\ldots+(S_{OB_{n-1}A_n}-S_{OA_nB_n})+$$
$$+(S_{OA_1B_1}-S_{OB_nA_1}).$$

Снова применив лемму, получим требуемое неравенство.

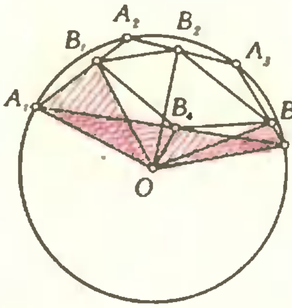


Рис. 3.

В заключение отметим, что если стороны $B_{k-1}B_k$ многоугольника $B_1B_2\ldots B_n$ перпендикулярны соответствующим радиусам OA_k, то неравенство (1) превращается в равенство, так что в этом случае многоугольник $B_1B_2\ldots B_n$ имеет наименьший возможный периметр $2S/R$. Предлагаем читателю, пользуясь этим, доказать, что *треугольник $B_1B_2B_3$, вписанный в данный остроугольный треугольник $A_1A_2A_3$, имеет минимальный периметр тогда и только тогда, когда B_i ($i=1, 2, 3$) — основания высот треугольника $A_1A_2A_3$.*

В. Дубровский

◆

М518. *Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принадлежат отрезку $[a; b]$, где $0<a<b$. Докажите неравенство*

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{1}{x_n}\right)\leqslant\frac{(a+b)^2}{4ab}\,n^2.$$

Наметим сначала геометрическую идею одного из самых коротких доказательств.

Рассмотрим на плоскости Oxy n точек $\left(x_i;\frac{1}{x_i}\right)$, $i=1, 2, \ldots, n$. Эти точки лежат на гиперболе $y=\frac{1}{x}$, причем по условию $a\leqslant x_i\leqslant b$. Точка $M^*(x^*;\ y^*)$ с координатами

$$x^*=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n},\quad y^*=\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}{n} \qquad (1)$$

— центр тяжести n одинаковых материальных точек $\left(x_i;\frac{1}{x_i}\right)$. Поэтому она принадлежит выпуклой фигуре, ограниченной дугой гиперболы и отрезком прямой с концами в точках $A\left(a;\frac{1}{a}\right)$ и $B\left(b;\frac{1}{b}\right)$ (рис. 4).

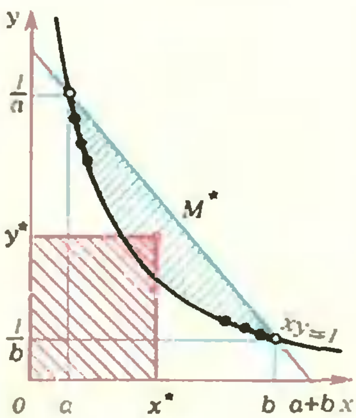


Рис. 4.

Произведение x^*y^* — площадь заштрихованного на рисунке 4 прямоугольника — достигает максимума, когда точка M^* попадает в середину отрезка AB. В самом деле, ясно, что если $(x^*;\ y^*)$ не лежит на $[AB]$, то площадь можно увеличить, сдвинув точку M^* на отрезок AB. А для точек $(x;\ y)$ этого отрезка y — линейная функция от x, следовательно, площадь $s(x)=xy$ — квадратный трехчлен от x. Поскольку $s(x)$ принимает при $x=a$ и $x=b$ одинаковые значения $s(a)=s(b)=1$, а $s(0)=0$ (рис. 5), максимум $s(x)$ достигается посередине между $x=a$ и $x=b$ — при $x=\frac{a+b}{2}$, $y=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

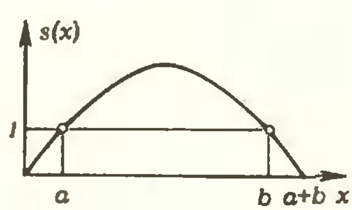


Рис. 5.

Отсюда $x^*y^*\leqslant\frac{a+b}{2}\cdot\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}=\frac{(a+b)^2}{4ab}$,

что и требуется доказать.

В более математическом обосновании нуждается лишь тот факт, что «центр тяжести» — точка с координатами (1) — лежит н и ж е отрезка AB. Заметим, что уравнение прямой AB имеет вид $aby+x=a+b$ (проверьте, что точки A и B лежат на этой прямой), так что основной этап нашего доказательства — неравенство

$$aby^*+x^*\leqslant a+b. \qquad (2)$$

Теперь все готово для короткого формального доказательства (которым мы могли бы ограничиться): для каждого i

$$\frac{ab}{x_i}+x_i\leqslant a+b, \qquad (3)$$

поскольку $(x-a)(x-b)\leqslant 0$ для $x\in[a;\ b]$. Сложив неравенства (3) по $i=1, 2, \ldots, n$, разделив обе части на n и введя обозначения (1), получим (2), откуда

$$x^*y^*\leqslant x^*\cdot\frac{(a+b-x^*)}{ab}\leqslant\frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{ab}=\frac{(a+b)^2}{4ab}.$$

Н. Васильев

◆

М519. *Даны две кучки спичек. Вначале в одной кучке m спичек, в другой — n спичек, $m>n$. Двое игроков по очереди берут из кучки спички. За один ход игрок берет из одной кучки любое (отличное от нуля) число спичек, кратное числу спичек в другой кучке. Выигрывает игрок, взявший последнюю спичку в одной из кучек.*

а) Докажите, что если $m>2n$, то игрок, делающий первый ход, может обеспечить себе выигрыш.

б) При каких α верно следующее утверждение: если $m>\alpha n$, то игрок, делающий первый ход, может обеспечить себе выигрыш?

Рис. 6.

Текущую ситуацию в игре будем описывать парой натуральных чисел (i, j), где i — число спичек в первой кучке, а j — во второй.

а) В случае, когда $m\geqslant 2n$, несложно доказать существование выигрышной стратегии для начинающего, не указывая ее конкретно. Из ситуации (m, n) мы можем сделать $\left[\frac{m}{n}\right]$ различных ходов:

$(m, n)\to(m-n, n)$, $(m-2n, n)$, ..., $(m-(q-1)n, n)$, $(m-qn, n)$,

где $q=[m/n]$, то есть $0\leqslant m-qn<n$. Если ситуация $(m-qn, n)$ — проигрышная, то выигрышный ход: $(m,n)\to(m-qn, n)$. Если же ситуация $(m-qn, n)$ — выигрышная, то предыдущая $(m-(q-1)n, n)$ — проигрышная, поскольку из нее можно пойти только в $(m-qn, n)$. (Заметим, что при $m\geqslant 2n$ обязательно $q\geqslant 2$, так что $q-1\geqslant 1$.) В этом случае выигрышный ход: $(m, n)\to(m-(q-1)n, n)$.

б) Заметим, что «выигрышность» ситуации зависит только от отношения $\frac{m}{n}$, где m и n — первоначальные количества спичек в обеих кучках (поскольку при переходе от одной позиции к другой наибольший общий делитель чисел m и n сохраняется).

Отбросим теперь условие $m>n$. Тогда наша задача сводится к такой: *рассортировать все рациональные числа на два класса: выигрышные числа $\alpha=\frac{m}{n}$ и проигрышные числа.*

Очевидно, что ситуации (m, n) и (n, m) — одновременно выигрышные или одновременно проигрышные. Поэтому, если отношение $\frac{m}{n}$ отмечать на числовой оси, то точки α и $\frac{1}{\alpha}$ будут равноправными: из того, что точка α — выигрышная, следует, что и $\frac{1}{\alpha}$ — выигрышная, и наоборот. Заметим, что ход $(m, n)\to(m-kn, n)$ соответствует вычитанию из $\alpha=m/n$ целого числа k.

Ясно, что все целые числа α (а, следовательно, и обратные целым) будут выигрышными: в ситуации, когда m/n — целое число, начинающий выигрывает за один ход, забирая все спички из бо́льшей кучки. Нетрудно сообразить, что в любой арифметической прогрессии с меньшим единицы (положительным) начальным членом и разностью 1 имеется ровно одна проигрышная точка. Из пункта а) следует, что все проигрышные числа меньше двух; поэтому проигрышные точки могут находиться только внутри интервала $\left]\frac{1}{2}; 2\right[$.

Докажем теперь, что все отличные от единицы рациональные точки некоторого отрезка $I\subset\left]\frac{1}{2}; 2\right[$ единичной длины являются проигрышными, и попробуем, найдя этот отрезок, указать выигрышную стратегию для начинающего. Легко понять, что отрезок I должен быть *замкнут относительно операции обращения:* именно, ес-

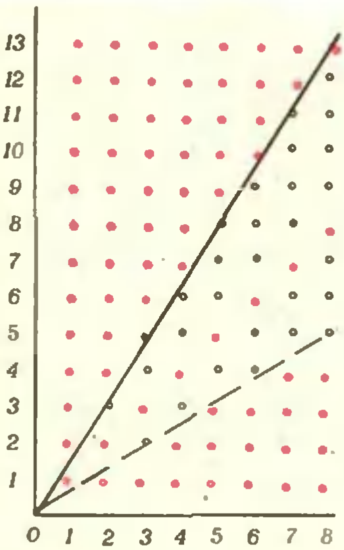


Рис. 7.

ли $\alpha\in I$, то и $\frac{1}{\alpha}\in I$. Пусть $\gamma>1$ — правый конец этого единичного отрезка. Тогда $\gamma-1$ — его левый конец и должно быть $\gamma-1=\frac{1}{\gamma}$. Отсюда находим, что $\gamma=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (это число известно под названием *«золотого сечения»*). Рассмотрим ситуацию (i, j) такую, что $\frac{i}{j}=\alpha\in\,]\gamma-1;\ \gamma[$ (рис. 6), причем $\frac{i}{j}\neq 1$. Допустим, что $i>j$; тогда $\alpha\in\,]\gamma-1;\ \gamma[$. В этой ситуации у играющего имеется единственный ход $(i,j)\to(i-j,\ j)$, для которого

$$\alpha'=\frac{i-j}{j}=\frac{i}{j}-1=\alpha-1<\gamma-1,$$

то есть этот единственный ход приводит к ситуации с отношением α' вне интервала $]\gamma-1;\ \gamma[$. Кроме того, на этом ходе игра не кончается.

Пусть теперь $\frac{m}{n}=\alpha\notin\left]\gamma-1;\ \gamma\right[$ и $\frac{m}{n}\notin\mathbf{Z}$ (случай, когда отношение $\frac{m}{n}$ — целое, описан выше); положим, для определенности, $m>n$. Найдется такое $k\in\mathbf{Z}$, что $\frac{m}{n}-k\in\left]\gamma-1;\ \gamma\right[$, так что после хода $(m,\ n)\to(m-kn,\ n)$ мы получим ситуацию с отношением, находящимся в интервале $]\gamma-1;\ \gamma[$ и не равным единице (поскольку $m/n\notin\mathbf{Z}$).

Отсюда получаем выигрышную стратегию для начинающего игрока. Если $\frac{m}{n}\in\mathbf{Z}$, то он выигрывает первым ходом. Если $\frac{m}{n}\notin\mathbf{Z}$ и $\frac{m}{n}\notin\left]\gamma-1;\ \gamma\right[$, то каждым своим очередным ходом он добивается того, чтобы отношение $\frac{m_k}{n_k}$ попадало в интервал $]\gamma-1;\ \gamma[$, после чего его противник может сделать единственный—ход, приводящий снова к ситуации с отношением вне указанного интервала. Понятно, что в конце концов начинающий выиграет. На рисунке 7 красные точки соответствуют выигрышным ситуациям $(m,\ n)$, черные — проигрышным.

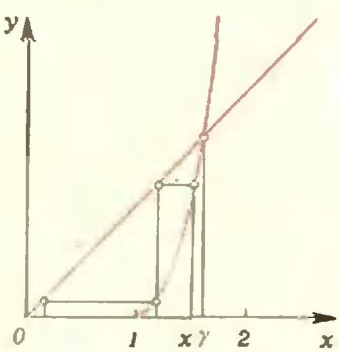


Рис. 8.

Таким образом, утверждение пункта б) задачи верно при всех $\alpha>\gamma$ $\left(\gamma=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$.

А. Слинько

Примечание редакции

При решении этой задачи, как это часто бывает не только в элементарной математике, но и в серьезных математических исследованиях, нам очень помог «угаданный» ответ: в некоторый момент мы предположили, что все рациональные не целые точки некоторого интервала единичной длины — проигрышные, и после этого быстро довели исследование до конца. Но в этой задаче можно обойтись и без такого дополнительного шага: число γ возникает в ней естественным образом из следующих рассуждений. Как уже было замечено, все проигрышные точки принадлежат интервалу $]1/2;\ 2[$. Легко сообразить также, что если точка $x\in\,]1;\ 2[$ — проигрышная (выигрышная), то точка $x-1$ — выигрышная (проигрышная). Поэтому все точки интервала $]1;\ 3/2[$ — проигрышные, и нам остается исследовать точки интервала $]3/2;\ 2[$. Предположим, что точка $x\in\,]3/2;\ 2[$ — проигрышная. Тогда точки $x-1$ и $1/(x-1)$ — выигрышные, причем $1/(x-1)$ меньше 2 (но больше 1).

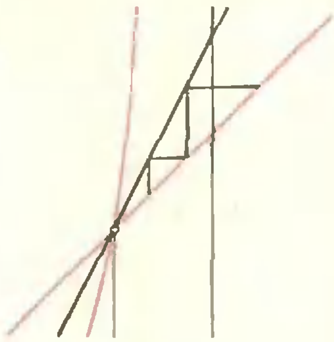


Рис. 9

Поэтому $1/(x-1)-1=(2-x)/(x-1)$ — проигрышная точка. Итак, если точка $x\in]3/2;\ 2[$ — проигрышная, то и точка $(2-x)/(x-1)$ — тоже проигрышная. Нарисуем график функции $(x-1)/(2-x)$ (рис. 8). На рисунке 8 показано, как по точке x найти точку $(x-1)/(2-x)$. При преобразовании $x\to(x-1)/(2-x)$ есть неподвижная точка — корень уравнения $x^2-x-1=0$, принадлежащий интервалу $]3/2;\ 2[$ (это и есть число γ). Легко доказать, что если точка находится правее точки γ, то итерации (повторения) нашего преобразования рано или поздно выведут ее за точку 2. (Одна из возможных схем доказательства приведена на рисунке 9: тангенс угла наклона черной прямой, проходящей через неподвижную точку $(\gamma;\ \gamma^2-\gamma-1)$, равен 2, а касательная к кривой $(x-1)/(2-x)$ идет круче — убедитесь в этом.)

Поэтому все точки из интервала $]\gamma;\ 2[$ — выигрышные и, следовательно, все точки из интервалов $]\gamma;\ \infty[$ и $]0;\ \gamma^{-1}[$ — выигрышные. Аналогично, если предположить, что некоторая точка из интервала $]3/2;\ \gamma[$ — выигрышная, то ее итерациями мы получим точку из интервала $]1;\ 3/2[$, откуда следует, что все точки из интервала $]1;\ \gamma[$ — проигрышные. Конечно, такое решение более громоздко. Однако зато оно и более поучительно!

◆

Ф526. *Полость теплоизолирующих стенок колбы термоса откачана до давления $p=10^{-5}$ атм (при комнатной температуре). Вместимость колбы 1 литр, площадь поверхности колбы $S=600$ см^2. Оценить время, в течение которого чай в таком термосе остынет с 90°C до 70°C. Теплоемкость воды $c=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К); универсальная газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(К·моль). Утечку тепла через пробку не учитывать.*

Отвод тепла от внутренней стенки колбы (от чая) осуществляется молекулами газа, оставшегося в полости между внутренней и внешней стенками колбы. Для того и откачивают полость стенок, чтобы оставшийся там газ не образовывал сплошной теплопроводной среды, то есть чтобы молекулы двигались между стенками без столкновения друг с другом.

Будем считать, что после столкновения со стенкой молекула имеет в среднем энергию, пропорциональную температуре стенки. После удара о внешнюю стенку кинетическая энергия поступательного движения молекулы $\varepsilon_1\sim{}^3/_2\,kT_К$, где $T_К$ — комнатная температура; после удара о внутреннюю стенку $\varepsilon_2\sim{}^3/_2\,kT'$, где T' — температура чая. Эта температура все время меняется. Однако интервал изменения T' невелик ($\Delta T=363$ К $-$ 343 К $=20$ К). Поэтому для оценки можно считать, что $\varepsilon_1\sim{}^3/_2\,kT_С$, где $T_С=353$ К — среднее значение температуры горячей стенки.

Следовательно, каждая молекула при ударе о горячую стенку «забирает» от чая энергию

$$\Delta\varepsilon\sim{}^3/_2\,k\,(T_С-T_К).$$

Число молекул, соударяющихся с горячей стенкой за единицу времени, пропорционально ${}^1/_2 n\,\overline{|v_x|}\,S$, где n — плотность молекул газа, $\overline{|v_x|}$ — среднее значение модуля проекции скорости молекулы на ось OX, перпендикулярную стенке. Число молекул, ударившихся о стенку за время Δt,

$$N\sim{}^1/_2\,n\,\overline{|v_x|}\,S\Delta t.$$

Эти молекулы заберут от чая энергию

$$\Delta E=N\,\Delta\varepsilon\sim{}^3/_4\,n\overline{|v_x|}\,Sk(T_С-T_К)\,\Delta t.$$

Очевидно, что эта энергия равна изменению ΔU внутренней энергии чая за время Δt: $\Delta E=\Delta U$. Так как

$$\Delta U=Mc\Delta T,$$

где ΔT — изменение температуры чая,

$${}^3/_4\,n\overline{|v_x|}\,Sk\,(T_С-T_К)\,\Delta t\sim Mc\Delta T.$$

Отсюда

$$\Delta t\sim\frac{4Mc\Delta T}{3n\,\overline{|v_x|}\,Sk\,(T_С-T_К)}.$$

Считая что, $\overline{|v_x|}\sim\sqrt{RT_к/\mu}$ *), и учитывая, что $n=p/kT_к$ (это следует из уравнения Менделеева — Клапейрона), окончательно находим

$$\Delta t\sim\frac{4Mc\Delta T\sqrt{\mu T_к}}{3p\,(T_с-T_к)\,S\sqrt{R}}.$$

Подставляя числовые значения ($M=1$ кг, $\Delta T=20$ К, $T_к=293$ К, $p=1$ Па, $\mu=29\cdot10^{-3}$ кг/моль и т. д.), получим

$$\Delta t\sim3\cdot10^4\ \text{с}\sim10\ \text{ч}.$$

А. Стасенко

◆

Ф530. *В схеме, приведенной на рисунке 10, $\mathscr{E}_0>\mathscr{E}_1$. Определить заряд, который протечет через батарею с ЭДС $\mathscr{E}_0$ при замыкании ключа K, полагая, что внутренние сопротивления батарей и сопротивление катушки равны нулю. Диод считать идеальным (его прямое сопротивление равно нулю, обратное — бесконечности); конденсатор до замыкания ключа был не заряжен.*

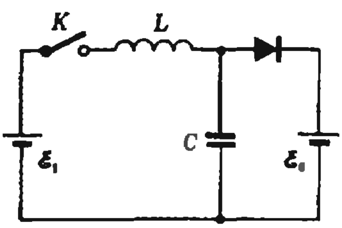


Рис. 10.

Будем считать, что диод начинает проводить ток, когда потенциал на аноде будет больше, чем на катоде. При этом сопротивление диода будет равно нулю и падение напряжения на нем будет также равно нулю.

Рассмотрим процесс, происходящий в цепи после замыкания ключа K, по этапам.

1. Ток, текущий через индуктивность L, заряжает конденсатор. При некотором значении тока I_1 конденсатор заряжается до напряжения $\mathscr{E}_1$. Заряд конденсатора $q_1=C\mathscr{E}_1$, энергия конденсатора $W_1=C\mathscr{E}_1^2/2$, энергия магнитного поля индуктивности $LI_1^2/2$. Работа, совершенная к этому времени батареей, равна $A=q_1\mathscr{E}_1$.

2. Хотя напряжения на батарее $\mathscr{E}_1$ и на конденсаторе одинаковы, конденсатор продолжает заряжаться — за счет энергии магнитного поля индуктивности. При некотором значении тока I_0 конденсатор заряжается до напряжения $\mathscr{E}_0$. Заряд конденсатора $q_0=C\mathscr{E}_0$, энергия конденсатора $W_0=C\mathscr{E}_0^2/2$, энергия магнитного поля индуктивности $LI_0^2/2$.

Работа, совершенная батареей $\mathscr{E}_1$ за время этапов 1 и 2, равна $A_1=q_0\mathscr{E}_1=C\mathscr{E}_0\mathscr{E}_1$.

3. С того момента, когда напряжение на конденсаторе становится равным $\mathscr{E}_0$, ток начинает течь через диод в батарею $\mathscr{E}_0$. Напряжение на конденсаторе с этого момента не меняется, энергия его остается равной $W_0=C\mathscr{E}_0^2/2$. Следовательно, энергия $LI_0^2/2$, имеющаяся в магнитном поле индуктивности, начинает уменьшаться — она идет на совершение работы по перемещению заряда через батарею $\mathscr{E}_0$.

4. Энергия магнитного поля индуктивности становится равной нулю. Энергия конденсатора по-прежнему равна $W_0=C\mathscr{E}_0^2/2$. Через батарею $\mathscr{E}_0$ прошел некоторый заряд Q. Энергия батареи $\mathscr{E}_0$ увеличилась на $\Delta W=Q\mathscr{E}_0$.

За время этапов 3 и 4 батарея $\mathscr{E}_1$ совершила работу $A_2=Q\mathscr{E}_1$.

Итак, за время всего процесса батарея $\mathscr{E}_1$ совершила работу

$$A_{\mathscr{E}_1}=A_1+A_2=C\mathscr{E}_0\mathscr{E}_1+Q\mathscr{E}_1.$$

Эта работа пошла на сообщение энергии $W_0=C\mathscr{E}_0^2/2$ конденсатору C и на увеличение энергии батареи $\mathscr{E}_0$ на $\Delta W=Q\mathscr{E}_0$. Согласно закону сохранения энергии

$$A_{\mathscr{E}_1}=W_0+\Delta W,$$

---

*) Так как $\overline{v_x^2}=\frac{1}{3}\overline{v^2}=\frac{1}{3}\frac{3RT_к}{\mu}$, то $\sqrt{\overline{v_x^2}}=\sqrt{\frac{RT_к}{\mu}}$. Хотя $\sqrt{\overline{v_x^2}}\neq\overline{|v_x|}$, однако $\overline{|v_x|}\sim\sqrt{\overline{v_x^2}}$. Поэтому мы будем считать, что $\overline{|v_x|}\sim\sqrt{\frac{RT_к}{\mu}}$.

то есть

$$C\mathscr{E}_0\mathscr{E}_1+Q\mathscr{E}_1=\frac{C\mathscr{E}_0^2}{2}+Q\mathscr{E}_0.$$

Отсюда находим заряд Q, протекший через батарею $\mathscr{E}_0$:

$$Q=\frac{C\mathscr{E}_0(2\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_0)}{2(\mathscr{E}_0-\mathscr{E}_1)}.$$

Примечание. Из полученного результата видно, что через батарею $\mathscr{E}_0$ заряд потечет только в том случае, если $\mathscr{E}_1<\mathscr{E}_0<2\mathscr{E}_1$. Если $\mathscr{E}_0>2\mathscr{E}_1$, то конденсатор никогда не зарядится до напряжения $\mathscr{E}_0$. Иными словами, максимальное напряжение, до которого можно зарядить конденсатор в схеме, приведенной на рисунке 11, равно $2\mathscr{E}$. Покажем это.

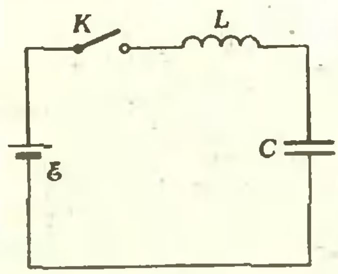


Рис. 11.

Пусть при некотором токе I напряжение на конденсаторе равно U, его заряд $q=CU$. Из закона сохранения энергии $q\mathscr{E}=CU\mathscr{E}=\frac{LI^2}{2}+\frac{CU^2}{2}$ находим

$$\frac{LI^2}{2}=\frac{CU}{2}(2\mathscr{E}-U).$$

Процесс зарядки конденсатора прекратится, когда ток в цепи станет равным нулю. При этом, как видно, $U=U_{max}=2\mathscr{E}$.

В. Скороваров

◆

Ф531. *Гейзеры могут рассматриваться как большие подземные резервуары, наполненные грунтовой водой и подогреваемые земным теплом (рис. 12). Выход из них на поверхность Земли осуществляется через узкий канал, который в «спокойный» период практически полностью заполнен водой. Считая, что «активный» период наступает, когда закипает вода в подземном резервуаре, и что во время извержения канал заполнен только паром, который выбрасывается наружу, оценить, какую часть воды теряет резервуар гейзера во время одного извержения. Глубина канала $h=90$ м; теплота испарения воды $\lambda=2{,}26\cdot10^6$ Дж/кг; теплоемкость воды $c=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К). Зависимость давления насыщенного водяного пара от температуры приведена на рисунке 13.*

Рис. 12.

К концу «спокойного» периода, когда весь канал заполняется водой, давление в подземном резервуаре становится равным

$$p=p_0+\rho gh=10 \text{ атм}$$

($p_0=1$ атм — атмосферное давление). Из графика зависимости давления насыщенного пара от температуры находим, что при таком давлении вода в подземном резервуаре закипит при температуре $t=180$°C. Кипение прекратится при $t_0=100$°C (когда канал заполнен только паром и давление в резервуаре равно $p_0=1$ атм).

Тепло, выделившееся при остывании воды от $t=180$°C до $t_0=100$ °C в течение «активного» периода, идет на испарение некоторой части воды, которая выбрасывается гейзером в виде пара во время извержения.

Из уравнения теплового баланса

$$cM(t-t_0)\approx\Delta M\lambda$$

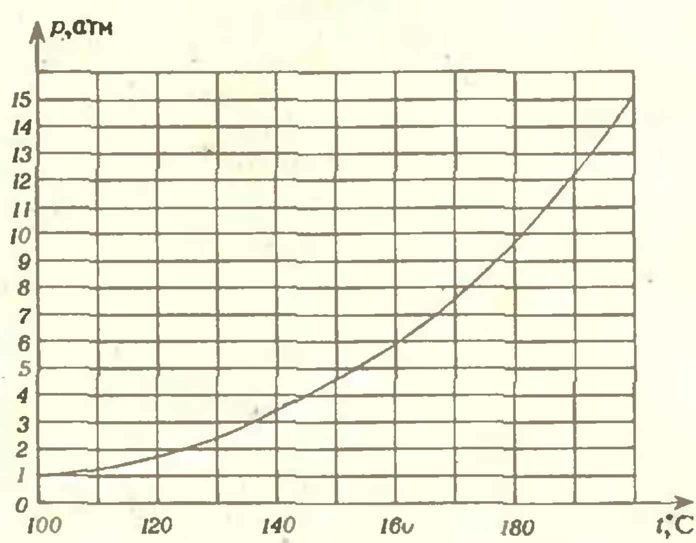


Рис. 13.

(M — масса остывшей воды, ΔM—масса образовавшегося пара) находим

$$\frac{\Delta M}{M} \approx \frac{c(t-t_0)}{\lambda} \approx 0{,}15.$$

Приведенное решение является оценочным, так как оно не учитывает ряда факторов, которые практически могут несколько изменить полученный результат. Например, при решении не учитывался подвод тепла к воде от нагретых пластов во время «активного» периода, а также поступления в резервуар новых порций воды по подземным каналам в ходе извержения.

С. Козел

◆

Ф532. *Маятник представляет собой легкий стержень длины l с грузом массой M на конце. К другому концу стержня прикреплена легкая цилиндрическая втулка a с внутренним радиусом r, надетая на вращающуюся горизонтальную ось b (рис. 14). Коэффициент трения между втулкой и осью равен μ. Определить угол отклонения стержня от вертикали в положении равновесия.*

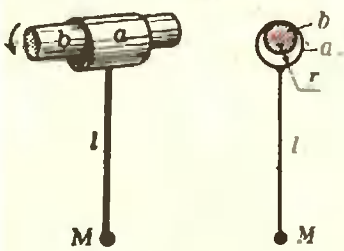


Рис. 14.

Очевидно, что груз M при вращении оси b против часовой стрелки смещен вправо от вертикали $O'O$, проходящей через центр оси. При этом точка A (рис. 15), в которой втулка маятника соприкасается с осью, смещена от верхней точки оси в сторону, противоположную направлению вращения оси. Покажем это.

При равновесии маятника сумма моментов всех действующих на него сил равна нулю. На маятник действуют сила тяжести $\vec{P}=M\vec{g}$, приложенная к грузу M, сила нормальной реакции оси $\vec{N}$ и сила трения скольжения $\vec{F}_{тр}$, приложенные к втулке в точке A. Моменты сил $\vec{N}$ и $\vec{F}_{тр}$ относительно точки A равны нулю. Следовательно, и момент силы $\vec{P}$ относительно этой точки должен быть равен нулю. Это означает, что точка A должна лежать на линии действия силы $\vec{P}$, то есть должна быть смещена вправо от верхней точки оси.

Отметим, что даже при сколь угодно большом коэффициенте трения μ груз M при равновесии маятника не может быть отклонен от вертикали $O'O$ на расстояние, большее радиуса r втулки a. Это видно из рисунка 15.

Найдем угол α, определяющий положение точки A. Так как при равновесии маятника векторная сумма сил $\vec{F}_{тр}$ и $\vec{N}$ направлена вертикально вверх (сумма сил $\vec{F}_{тр}$, $\vec{N}$ и $\vec{P}$ должна быть равна нулю), то

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_{тр}}{N} = \frac{\mu N}{N} = \mu$$

($F_{тр}$, N — модули сил $\vec{F}_{тр}$ и $\vec{N}$).

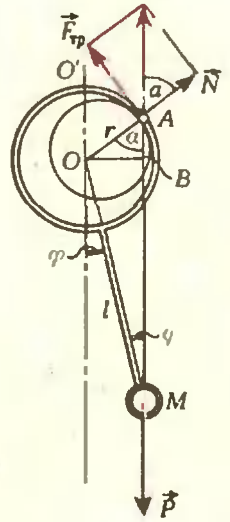


Рис. 15.

Найдем теперь угол φ, который составляет стержень маятника с вертикалью $O'O$ в положении равновесия. Как видно из рисунка 15,

$$\sin\varphi = \frac{|OB|}{r+l} = \frac{r\sin\alpha}{r+l}. \qquad (1)$$

Учитывая, что

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}},$$

находим (см. (1))

$$\sin\varphi = \frac{r}{r+l}\,\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}. \qquad (2)$$

Обратите внимание, что величина угла отклонения маятника определяется только значением коэффициента трения и размерами стержня и втулки и не зависит от массы груза M и скорости вращения оси.

В предельном случае $\mu=0$ формула (2) дает $\varphi=0$, то есть при отсутствии трения маятник в равновесии занимает вертикальное положение. С ростом силы трения, то есть

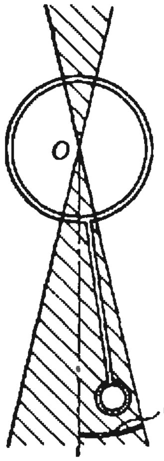


Рис. 16.

при $\mu \to \infty$, множитель $\mu/\sqrt{1+\mu^2}$ стремится к единице и $\sin\varphi \to r/(r+l)$. Это значит, что величина отклонения груза M вправо от вертикали $O'O$ (то есть длина отрезка OB на рисунке 15) стремится к r (см. (1)).

Замечательно, что такой маятник, если его вывести из равновесия, будет совершать незатухающие колебания. При достаточно быстром вращении оси действующая на втулку сила трения скольжения при любом направлении движения маятника направлена в сторону вращения оси и приводит лишь к смещению среднего положения на угол φ от вертикали.

Отметим, что существует еще одно положение равновесия маятника на вращающейся оси — положение, в котором груз M расположен выше оси, а стержень отклонен от вертикали вправо на такой же угол φ. Но это положение равновесия, как легко убедиться, является неустойчивым.

Если ось, на которую надета втулка маятника, закреплена неподвижно (не вращается), то, благодаря силе трения покоя, величина которой может принимать любые значения от нуля до μN, маятник может находиться в равновесии в любом отклоненном от вертикали положении в пределах сектора с углом φ, определяемым той же формулой (2). Это так называемая область застоя (рис. 16). Если отклонить маятник на угол больше предельного (больше φ) и отпустить, то, совершив несколько колебаний с убывающей амплитудой, маятник остановится где-то внутри области застоя. Остановка маятника может произойти в любой точке области застоя в зависимости от начальных условий. Интересно отметить, что такой же сектор положений равновесия существует и для «перевернутого» маятника на закрепленной оси.

Е. Бутиков, А. Быков, А. Кондратьев.

(Начало см. с. 20)

С. Гузов (Львов) **26**; *В. Джалоян* (с. Урцадзор АрмССР) **16**, **19а**), **21**, **24**; *О. Дмитриев* (Саратов) **16а**), **21**, **23а**), **26**, **28**, **30а**); *Б. Добров* (Ангарск) **28**, **30а**); *С. Довбыш* (Москва) **16**, **18**, **19**, **21**; *Е. Дюжикова* (Архангельск) **16а**); *И. Елишевич* (Чернигов) **21**; *А. Ермолин* (Петрозаводск) **21**, **22**, **26**, **28**, **29**; *И. Зверович* (Минск) **16а**); *Е. Зиманов* (Алма-Ата) **21**, **22**, **25**; *Т. Зограбян* (пос. Деларис АрмССР) **26**; *М. Ибрагимов* (Шуша) **16а**), **27**; *П. Иванов* (Вилюйск) **26**; *О. Ижболдин* (Ленинград) **16а**), **б**), **21—24**, **26—30**; *Р. Измайлов* (Баку) **16**, **18**, **19**, **21—29**; *Ф. Кабдыкаиров* (Алма-Ата) **18**, **19а**), **21**, **26**, **28**; *С. Каган* (Ленинград) **16**, **21**; *А. Кагарман* (Белорецк) **26**; *С. Калашников* (Рязань) **16а**), **б**); *А. Канель* (Москва) **21**, **23**, **24**, **26**, **28**, **30а**); *В. Кантерман* (Вильнюс) **16а**); *А. Каплан* (Сумгаит) **16**, **18**, **19а**), **21**, **22**, **24**, **26—28**, **30а**); *Г. Карагулян* (Ереван) **16**, **18**, **19а**), **21**, **22**, **24—28**, **29а**); *А. Келарев* (Свердловск) **16**, **19**, **21**, **23**, **26—29**, **30а**); *И. Кечов* (Сухуми) **16а**); *С. Коган* (Ленинград) **28**; *Г. Кокоев* (Тбилиси) **26**; *А. Колдашов* (Тбилиси) **26**, **28**; *С. Колева* (НРБ) **18**; *А. Коломыцев* (Ангарск) **30а**); *Ю. Кордюков* (Москва) **26**, **27**, **30а**); *А. Король* (Ташкент) **16б**), **22**, **23**; *С. Кочетов* (п/о Дружба Краснодарского края) **21**, **24**; *О. Кравец* (Воронеж) **16а**), **26—28**, **30а**); *В. Крикухин* (Махачкала) **26**; *С. Крылов* (Великий Устюг) **28**; *И. Крюков* (Ивантеевка Московской обл.) **16**, **18**, **19**; *С. Кузина* (п. Джалиль ТатАССР) **26**; *С. Кузнецов* (Ангарск) **16**, **18—24**, **26—28**, **30**; *Е. Кузьмин* (Череповец) **16**, **18**, **21—24**, **26**, **28**, **29**; *А. Кулеско* (Донецк) **16**, **19—21**, **24**, **25**, **27**, **28**; *А. Курилин* (Москва) **26**; *В. Кухарчук* (с. Малый Шпаков Ровенской обл.) **27**; *А. Кушнеров* (Москва) **21**, **26**; *А. Кущ* (Днепропетровск) **26**; *А. Латифуллин* (п. Азнакаево ТатАССР) **21**; *Б. Лейтес* (Москва) **26—28**, **30а**); *О. Лусикян* (Ереван) **18**, **20**; *Б. Маламед* (Запорожье) **16а**), **б**), **19а**); *М. Маламед* (Запорожье) **30а**); *Р. Мамедов* (Баку) **26**; *С. Мамедов* (Баку) **16а**), **26**; *Д. Мартынов* (п/о Черкизово Московской обл.) **21**; *М. Марьянович* (СФРЮ) **21**, **26**; *В. Матчишин* (Целиноград) **26**; *В. Машевский* (Одесса) **16**, **28**; *А. Медик* (Москва) **26—28**, **30**; *С. Мельников* (Буденовск Ставропольского края **26**, **28**; *Р. Мешойрер* (Москва) **16а**), **б**), **21**, **24**; *А. Миндлин* (Саратов) **16а**), **б**), **19а**), **21**; *Д. Миндлин* (Ташкент) **16**, **18**, **19а**), **20—24**, **27—29**, **30а**); *Е. Мордвинов* (Шатура) **26**, **27**; *С. Морейно* (Москва) **16**, **21**, **24**, **26—28**, **30а**); *Б. Надеждин* (Долгопрудный) **16**, **18**, **19а**), **20—24**, **26—28**; *О. Намазов* (с. Фахрало ГССР) **27**; *С. Наумов* (Тольятти) **26**; *И. Нестеров* (Пскент) **26**; *С. Новиков* (Херсон) **18**, **21—24**, **26**,

(Продолжение см. с. 43)

Г. Курдюмов

Консервативность бесконечного строя

В этой заметке решается задача М500г) из Задачника «Кванта» («Квант», 1978, № 4; см. также 1979, № 2). В конце заметки приводятся три новые задачи, решения двух из которых (задачи 1 и 3) не известны.

Имеется бесконечная в обе стороны шеренга первоклассников. По команде нале-ВО все первоклассники, кроме конечного их множества, повернулись налево; остальные повернулись направо. В каждую последующую секунду каждый первоклассник поворачивается на 180°, если первый и третий из стоящих перед ним повернуты к нему лицом. Все остальные первоклассники остаются неподвижны. Докажите, что движение в этом бесконечном строю через конечное время прекратится.

Пусть вначале все первоклассники стоят к нам лицом (рис. 1, *а*). После первого же поворота все они будут смотреть налево или направо. Назовем первоклассников, смотрящих (в данный момент) направо, *правыми*, смотрящих налево — *левыми* (рис. 1, *б*). Очевидно, в первый момент правыми окажутся те, кто правильно выполнил команду «нале-ВО», а «нарушители» окажутся левыми.

По условию в первый момент левых первоклассников конечное число.

Назовем первоклассников, которые в следующую секунду повернутся, *вертунами* (легко сообразить, что в каждый момент вертунов конечное число). Левых *невертунов* мы будем называть *злостными*. Очевидно, левый первоклассник является злостным, если перед ним на первом или на третьем месте стоит левый первоклассник (рис. 1, *в*). Вертунов мы будем рисовать зеленым цветом, злостных первоклассников — красным, а правых *невертунов* — синим (рис. 1, *в*).

Прежде чем приводить доказательство в общем виде, рассмотрим для иллюстрации частный случай. Пусть левых первоклассников ровно семь, и все они стоят подряд. Развитие во времени такого строя показано на рисунке 2. Мы видим, что через 12 секунд левых первоклассников не остается. Аналогичным образом бу-

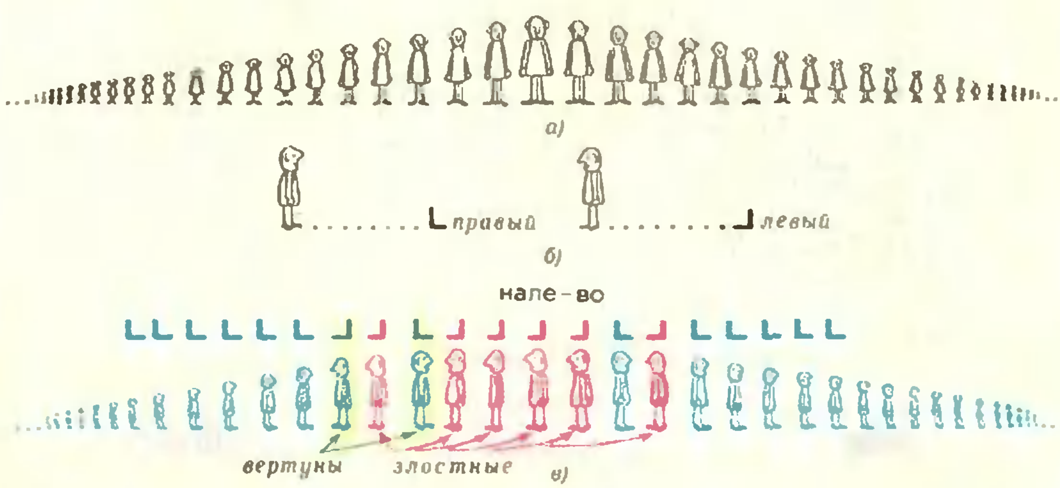


Рис. 1.

дет происходить *эволюция строя* при наличии любого сплошного куска из n левых первоклассников: через $2n—2$ секунд все первоклассники станут правыми, и движение прекратится.

Приведем теперь доказательство для общего случая — когда левые первоклассники стоят произвольным образом. Нам потребуется несколько дополнительных определений. Назовем *островом* отрезок, соединяющий самого правого из левых и самого левого из злостных левых. *Болотом* мы будем называть кратчайший отрезок, примыкающий к острову слева и включающий в себя всех вертунов (болота, конечно, может и не быть). Первоклассников, не вошедших ни в остров, ни в болото, назовем *морем* (рис. 3).

Лемма 1 (очевидная). *Если правее правого первоклассника A стоят только правые первоклассники, то A всегда так и будет правым (рис. 4).*

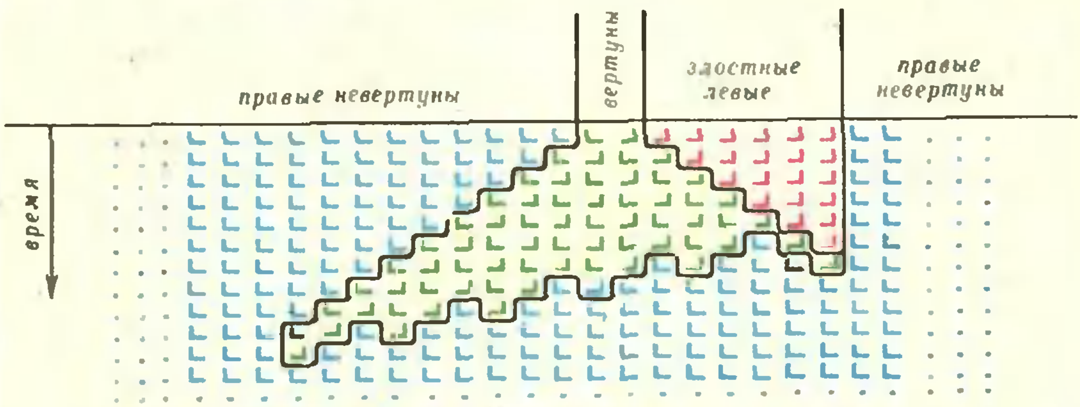


Рис. 2.

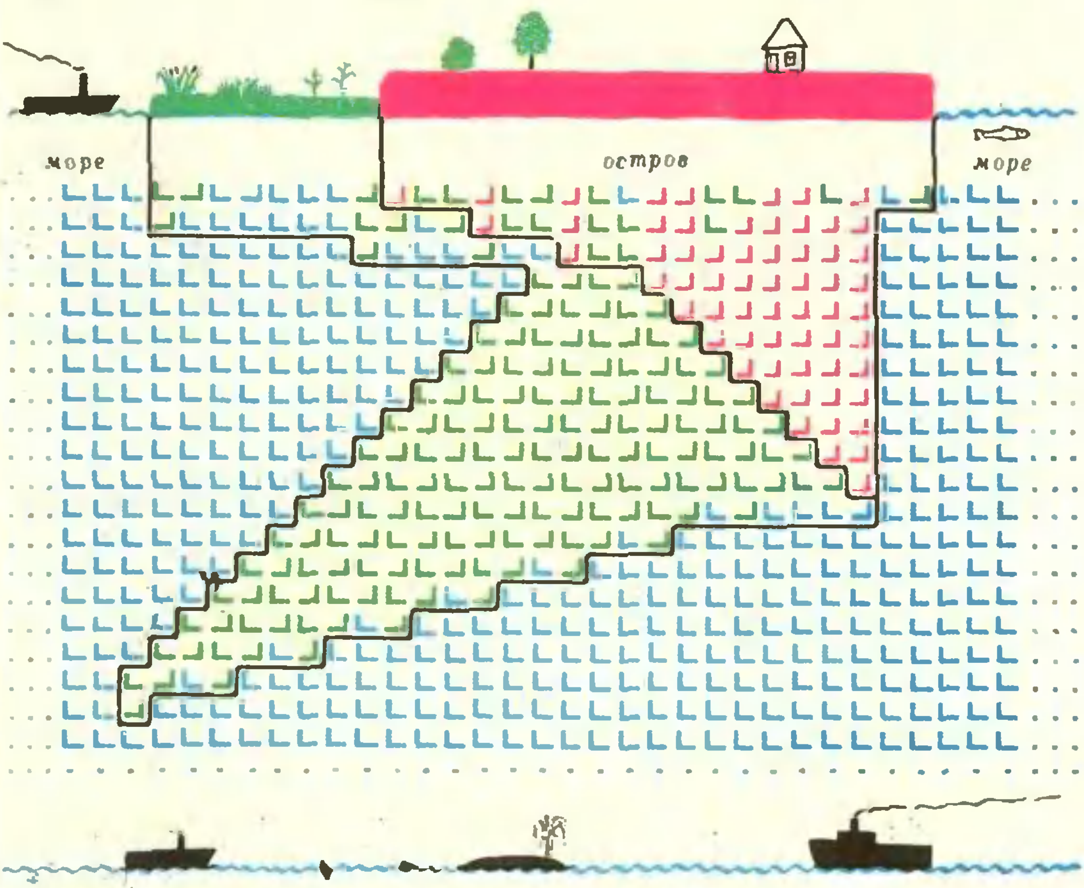


Рис. 3.

Лемма 2. *Если первоклассник A не является злостным и левее его нет злостных, то и в следующую секунду A не будет злостным.*

Доказательство. Если A — левый вертун или правый невертун, то через секунду A будет правым и, значит, не будет злостным. Пусть теперь A — правый вертун (рис. 5). Если его сосед слева (A — 1) в исходный момент — правый, то он (сосед) останется правым также и в следующую секунду. Если же первоклассник (A — 1) — левый, то, не будучи злостным, он все равно повернется направо. Рассуждения, проведенные для первоклассника (A — 1), проходят и для первоклассника (A — 3), стоящего от A третьим слева. Таким образом, через секунду первоклассники (A — 1) и (A — 3) окажутся правыми. Отсюда следует, что в этот момент A будет левым вертуном.

Из леммы 2 следует, что *если в некоторый момент первоклассник A не является злостным и левее его нет злостных, то A не будет злостным также и во все последующие моменты.*

Лемма 3. *Если левее злостного первоклассника A нет злостных, то не позднее чем через две секунды A перестанет быть злостным.*

Доказательство. Поскольку в исходный момент первоклассник A является злостным и левее него злостных нет, хотя бы один из первоклассников (A — 1) и (A — 3) является левым вертуном. Если среди первоклассников (A — 1), (A — 3) вертун один, то в следующий момент оба первоклассника (A — 1) и (A — 3) уже будут правыми (подумайте, почему) и первоклассник A перестанет быть злостным. То же произойдет и в случае, когда оба первоклассника (A — 1) и (A — 3) оказываются левыми вертунами. Пусть теперь оба они вертуны, но один из них левый, а другой — правый. Случай, когда первоклассник (A — 1) — левый вертун, а первоклассник (A — 3) — правый, исключается, поскольку тогда первоклассник (A — 2) не может быть ни левым, ни правым (рис. 6, *а*). Поэтому правый вертун — это первоклассник (A — 1), а левый вертун — первоклассник (A — 3) (рис. 6, *б*). В этом случае в следующий момент первоклассник (A — 1) становится левым, а первоклассник (A — 3) — правым, причем, как и выше, оба они вертунами стать не могут. Кроме того, поскольку (A — 1) не был злостным с самого начала и левее него злостных не было, он по лемме 2 не будет злостным. Значит, первоклассник (A — 1) — левый вертун, а (A — 3) — правый невертун. Поэтому в следующую секунду первоклассники (A — 1) и (A — 3) оба становятся правыми и первоклассник A перестает быть злостным.

Лемма 3 доказана.

Из этих лемм следует, что если *n — длина острова* (число входящих в него первоклассников), то не более чем через 2*n* секунд остров исчезнет.

Лемма 4. *Если среди трех первоклассников, стоящих подряд, нет злостных левых, а правее их стоят только правые, то через секунду все трое будут правыми невертунами.*

Рис. 4.

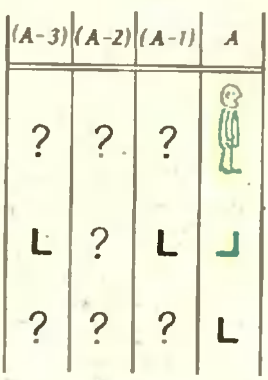


Рис. 5.

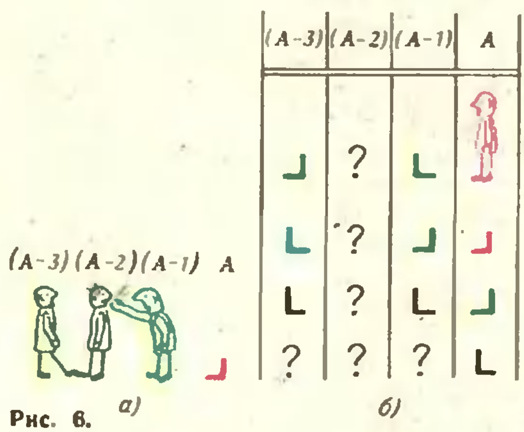


Рис. 6. а) б)

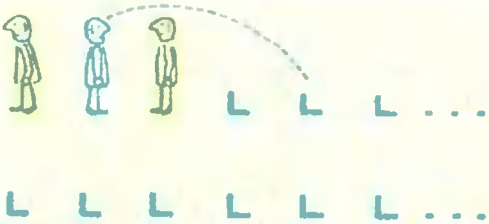


Рис. 7.

Утверждение леммы следует из того факта, что ни один из вышеуказанной тройки первоклассников не может быть правым вертуном (рис. 7).

Итак, после исчезновения острова правая граница болота будет двигаться влево со скоростью не меньше 3. Очевидно, левая его граница не может двигаться влево со скоростью больше 1. Отсюда следует, что длина болота будет уменьшаться (со скоростью не менее 2) и через некоторое время после того, как исчез остров, исчезнет и болото. Все первоклассники станут правыми.

Задача решена. Немного более тонкими рассуждениями можно показать, что движение может продолжаться не более чем $2l+2$ секунд, где l — наибольшее расстояние между двумя левыми первоклассниками после первого поворота (по команде нале-ВО).

З а д а ч а 1. *Пусть n — количество левых первоклассников после первого поворота. Укажите функцию $f(n)$ такую, что время t движения в строю не может быть больше $f(n)$, однако возможно $t=f(n)$.*

Итак, мы нашли такое *состояние строя* A_1 (все первоклассники смотрят вправо), любое конечное изменение которого (т. е. поворот на 180° конечного числа первоклассников) исчезнет за конечное время (при эволюции по нашим правилам).

Ясно, что этим свойством обладает и состояние строя A_2 «все смотрят влево»: точно так же, как исчезает «остров» в «океане», будет исчезать «озеро» на «материке».

Указанные два состояния строя обладают свойством *консервативности*: они не меняются со временем, и, какому бы конечному изменению мы их ни подвергли, строй вернется к исходному состоянию.

З а д а ч а 2. *Докажите, что других консервативных состояний не существует.*

Рассмотрим теперь более общую задачу. Пусть A — некоторое состояние нашего строя (т. е. некоторая бесконечная в обе стороны цепочка символов ⌋ и ⌊). Обозначим через $A(t)$ состояние, в которое строй (при эволюции по нашим правилам) перейдет через t секунд. Состояния A и B назовем *эквивалентными*, если со временем они переходят в одно и то же состояние, то есть если существуют такие t_1 и t_2, что $A(t_1)=B(t_2)$. Будем говорить, что состояние A *иммунно* (так сказать, невосприимчиво), если ему эквивалентно любое состояние A', отличающееся от A состояниями лишь конечного числа первоклассников.

Легко видеть, что все состояния, эквивалентные консервативным (в том числе — консервативные), иммунны.

З а д а ч а 3. *Существуют ли у описанного выше строя иммунные состояния, не эквивалентные консервативным?*

Советуем купить

Математика

1. К о к с е т е р Г. С. М., Г р е й т ц е р С. Л. *Новые встречи с геометрией.* «Наука», ц. 50 к.

2. П о л и а Г., С е г е Г. *Задачи и теоремы из анализа.* Ч. 2-я. «Наука», ц. 1 р. 20 к.

Физика, механика, астрономия

3. Д у б о ш и н Г. Н. *Небесная механика.* «Наука», ц. 1 р. 30 к.

4. З у б о в В. Г. *Механика. (Начала физики.)* «Наука», ц. 90 к.

5. И р о д о в И. Е. *Задачи по общей физике.* «Наука», ц. 85 к.

6. М а й е р В. В. *Простые опыты с ультразвуком.* «Наука», ц. 20 к.

7. *Сборник задач по общему курсу физики. Оптика.* «Наука», ц. 55 к.

8. *Сборник задач по общему курсу физики. Электричество и магнетизм.* «Наука», ц. 45 к.

9. *Сборник задач по общему курсу физики. Термодинамика и молекулярная физика.* «Наука», ц. 32 к.

10. *Сборник задач по общему курсу физики. Механика.* «Наука», ц. 67 к.

11. *Фейнмановские лекции по физике. Задачи и упражнения с ответами и решениями.* «Мир», ц. 2 р. 30 к.

12. Ф е й н м а н Р. и др. *Фейнмановские лекции по физике.* Т. 8. «Мир», ц. 2 р. 40 к.

13. Я в о р с к и й Б. М., Д е т л а ф А. А. *Справочник по физике для инженеров и студентов вузов.* «Наука», ц. 2 р. 68 к.

А. Земляков

Проверь себя

Ниже мы публикуем вопросы, предлагавшиеся на республиканском туре Всесоюзной математической олимпиады школьников в 1979 году. На каждый вопрос нужно выбрать единственный правильный ответ.

VIII класс

Алгебра

1. Какое из указанных неравенств задает множество, показанное на рисунке 1 штриховкой?

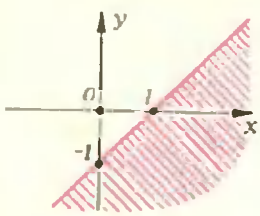


Рис. 1.

А) $y \leqslant x-1$; Б) $y \geqslant x-1$; В) $y \leqslant 1-x$; Г) $y \geqslant 1-x$; Д) $y \leqslant x+1$.

2. Используя практические приемы приближенных вычислений, найдите разность $x-y$ чисел $x \approx 13{,}6517$ и $y \approx 10{,}4$.

А) 3,2517; Б) 3,25; В) 3,2; Г) 3,3; Д) нужное значение не указано.

3. Какой формулой задается функция, обратная к функции $y=\frac{2}{x}$?

А) $y=\frac{x}{2}$; Б) $y=\frac{2}{x}$; В) $y=2x$; Г) $y=-\frac{2}{x}$; Д) $y=-\frac{x}{2}$.

4. При каких значениях a верно равенство $\sqrt{a^2}=-a$?

А) при всех a; Б) при $a \geqslant 0$; В) при $a \leqslant 0$; Г) при $a=0$; Д) ни при каких a.

5. При каких значениях x верно равенство

$$x^{-\frac{4}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{x}?$$

А) при всех x; Б) при $x \neq 0$; В) при $x>0$; Г) при $x=1$; Д) ни при каких x.

6. На рисунке 2 изображены эскизы графиков трех показательных функций $y=a^x$, $y=b^x$, $y=c^x$. Каковы соотношения между основаниями a, b и c?

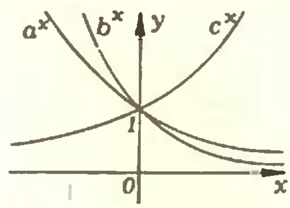


Рис. 2.

А) $c<a<b$; Б) $b<a<c$; В) $a<b<c$; Г) $c<b<a$; Д) $a<c<b$.

Геометрия

7. Определите знаки значений функций $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ для угла $\alpha=-1979°$.

А) $\cos\alpha>0$, $\sin\alpha>0$;
Б) $\cos\alpha>0$, $\sin\alpha<0$;
В) $\cos\alpha<0$, $\sin\alpha>0$;
Г) $\cos\alpha<0$, $\sin\alpha<0$;
Д) определить нельзя.

8. Каким соотношением связаны длины сторон a и c прямоугольного треугольника ABC с острым углом $\hat{A}=\alpha$ (рис. 3)?

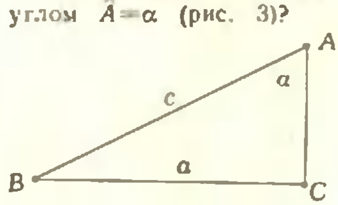


Рис. 3.

А) $c=a\cos\alpha$; Б) $c=\frac{a}{\cos\alpha}$; В) $c=a\sin\alpha$; Г) $c=\frac{a}{\sin\alpha}$; Д) $c=a\operatorname{tg}\alpha$.

9. Длины трех сторон треугольника равны 1, 3 и 5. Каков вид такого треугольника?

А) остроугольный; Б) прямоугольный; В) тупоугольный; Г) по длинам сторон определить нельзя; Д) такого треугольника не существует.

10. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 4). Какому из указанных векторов равна разность векторов $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{OD}$?

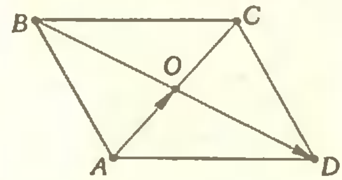


Рис. 4.

А) $\overrightarrow{AB}$; Б) $\overrightarrow{BA}$; В) $\overrightarrow{AD}$; Г) $\overrightarrow{DA}$; Д) нужный вектор не указан.

IX класс

Алгебра и начала анализа

1. Чему равен предел последовательности $x_n=\frac{n^2-1}{n^4-1}$?

А) 0; Б) 1; В) 0,5; Г) 2; Д) этот предел не существует.

2. Чему равен предел функции $f(x)=\frac{x^2-1}{x^4-1}$ при $x \to 1$?

А) 0; Б) 1; В) 0,5; Г) 2; Д) этот предел не существует.

3. Какое из указанных множеств является областью определения функции

$$f(x)=\lg(x-1)+\sqrt{2-x}?$$

А) $]-\infty;\ 2] \cup [1;\ \infty[$;
Б) $]-\infty;\ 2] \cap [1;\ \infty[$;
В) $]-\infty;\ 2] \cup]1;\ \infty[$;
Г) $]-\infty;\ 2] \cap]1;\ \infty[$;
Д) $]-\infty;\ 2[\cap]1;\ \infty[$.

4. При каких значениях x функция, график которой изображен на рисунке 5, не является непрерывной?

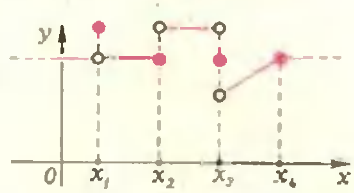


Рис. 5.

А) при $x \in \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$; Б) при $x \in \{x_1, x_2, x_3\}$; В) при $x \in \{x_1, x_3, x_4\}$; Г) при $x \in \{x_1, x_3\}$; Д) при $x \in \{x_2, x_3\}$.

5. Какую производную имеет функция $f(x)=(x^5+1)^6$?

А) $6(x^5+1)^5$; Б) $5x^4\times(x^5+1)^5$; В) $30x^4(x^5+1)^5$; Г) $(5x^4)^6$; Д) $6(5x^4)^5$.

6. На рисунке 6 изображен график некоторой квадратичной функции. Какой из расположенных под ним графиков А), Б), В), Г)

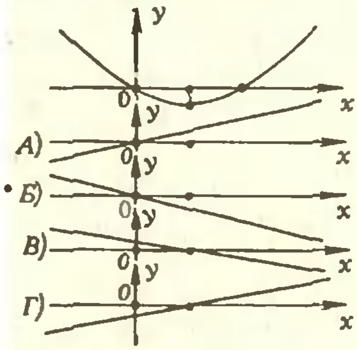


Рис. 6.

может являться графиком производной этой функции?

Д) ни один из графиков не подходит.

Геометрия

7. Прямая a скрещивается с прямой b, прямая b скрещивается с прямой c. Каково может быть взаимное расположение прямых a и c?

А) обязательно скрещиваются; Б) обязательно параллельны; В) обязательно пересекаются; Г) либо скрещиваются, либо параллельны; Д) могут скрещиваться, пересекаться, быть параллельными.

8. На поверхности параллелепипеда взяты точки A, B, C, D, как показано на рисунке 7 (A, B, C —

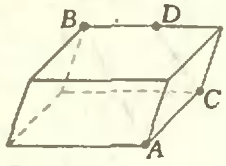


Рис. 7.

вершины, D — середина ребра). Каково взаимное расположение в пространстве прямых AB и CD?

А) пересекаются; Б) скрещиваются; В) параллельны; Г) либо пересекаются, либо скрещиваются; Д) могут пересекаться, скрещиваться, быть параллельными.

9. Точка M — середина ребра CC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 8). Каково разложение вектора $\overrightarrow{BM}$ по векторам $\vec a=\overrightarrow{AB}$, $\vec b=\overrightarrow{AD}$, $\vec c=\overrightarrow{AA_1}$?

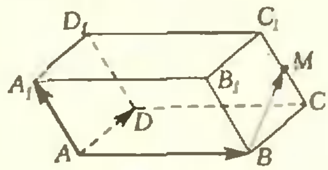


Рис. 8.

А) $\vec a+\vec b+\frac{1}{2}\vec c$; Б) $\vec a+\vec b-\frac{1}{2}\vec c$; В) $\vec b+\frac{1}{2}\vec c$; Г) $\vec b-\frac{1}{2}\vec c$; Д) $\vec a+\frac{1}{2}\vec c$.

10. Каково множество всех возможных значений скалярного произведения $c=\vec a\cdot\vec b$, если известно, что длины векторов $\vec a$ и $\vec b$ равны 2 и 3?

А) $2\leqslant c\leqslant 3$; Б) $2\leqslant c\leqslant 6$; В) $0\leqslant c\leqslant 6$; Г) $-6\leqslant c\leqslant 6$; Д) c может быть любым действительным числом.

X класс

Алгебра и начала анализа

1. Какая из указанных функций является решением дифференциального уравнения $y''=-4y$?

А) $y=\cos\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)$;

Б) $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$;

В) $y=\cos\left(16x+\frac{\pi}{2}\right)$;

Г) $y=2\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$;

Д) нужная функция не указана.

2. Упростите выражение $\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$.

А) $\sin x$; Б) $\cos x$; В) $-\sin x$; Г) $-\cos x$; Д) упростить нельзя.

3. Чему равно значение $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$?

А) $-\frac{\pi}{3}$; Б) $-\frac{2\pi}{3}$; В) $\frac{2\pi}{3}$;

Г) $\pm\frac{2\pi}{3}$;

Д) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, где $k\in\mathbf{Z}$.

4. Сколько существует первообразных $F(x)$ для функции $f(x)=\cos 2x$ таких, что $F(0)=2$?

А) ни одной; Б) одна; В) две; Г) четыре; Д) бесконечно много.

5. Какую производную имеет функция $f(x)=2^{3x}$?

А) $\ln 2\cdot 2^{3x}$; Б) $\ln(3x)\times 2^{3x}$; В) $\ln 3\cdot 2^{3x}$; Г) $3\ln 2\cdot 2^{3x}$; Д) $2\ln 3\cdot 2^{3x}$.

6. Какова область определения функции $f(x)=\log^5_8(\log_{0,5}x)$?

А) $]0;\infty[$; Б) $]1;\infty[$; В) $]0;1[$; Г) $]0,5;\infty[$; Д) $]0;0,5[$.

Геометрия

7. Плоскость α перпендикулярна плоскости β, плоскость β перпендикулярна плоскости γ. Каково может быть взаимное расположение плоскостей α и γ?

А) обязательно перпендикулярны; Б) обязательно параллельны; В) пересекаются, но не перпендикулярны; Г) либо параллельны, либо перпендикулярны; Д) могут быть параллельными или пересекаться под любым углом.

8. Какой из указанных векторов $\vec a$ перпендикулярен плоскости, заданной уравнением $-x+y-z=-2$?

А) $\vec a=(1;\ 1;\ 1)$; Б) $\vec a=(1;\ -1;\ 1)$; В) $\vec a=(1;\ 1;\ 0)$; Г) $\vec a=(1;\ 0;\ 1)$; Д) нужный вектор не указан.

9. Площадь основания правильной пирамиды равна S, двугранный угол при основании равен 60°. Чему равна площадь боковой поверхности пирамиды?

А) $2S$; Б) $\frac{S}{2}$; В) $\frac{S\sqrt{3}}{2}$; Г) $\frac{2S}{\sqrt{3}}$; Д) определить нельзя.

10. Точка P — середина ребра DD_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, имеющего объем V. Чему равен объем пирамиды $PABCD$ (рис. 9)?

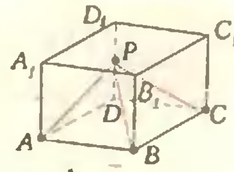


Рис. 9.

А) $\frac{1}{2}V$; Б) $\frac{1}{3}V$; В) $\frac{1}{6}V$; Г) $\frac{1}{12}V$;

Д) определить нельзя.

Модель многогранника Конелли

В статье В. Залгаллера («Квант», 1978, № 9) дается краткое описание сделанной у нас в Харькове модели многогранника Р. Конелли — замкнутого, непрерывно изгибаемого многогранника. Здесь мы более подробно расскажем вам, как можно построить модель такого многогранника (рис. 1).

На обложке (с. 2) изображена уменьшенная в четыре раза развертка нашей модели, т. е. совокупность граней многогранника Конелли с указанием правила склеивания их сторон. Склеиванию с помощью наклеек — узких полосок у края развертки — подлежат все пары одинаково обозначенных сторон. В результате склеивания получается невыпуклый многогранник, имеющий центр симметрии, причем симметричными являются вершины, обозначенные одинаковыми буквами (со штрихами и без них). Многогранник имеет 32 грани, 24 вершины и 54 ребра, т. е. его эйлерова характеристика, как и у сферы, равна 2(=32+24—54).

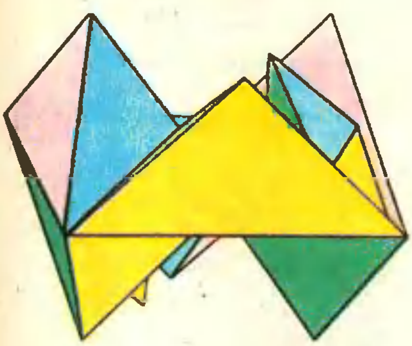


Рис. 1.

Развертку многогранника (без наклеек) следует вырезать из достаточно плотной бумаги, поточнее выполняя все построения. Приводим поэтому длины ребер модели (*в сантиметрах*): длину 1 имеет ребро CQ, длину 3 — MS, $2\sqrt{7}$ — AS, BQ, $4\sqrt{2}$ — PA, PB, PQ, PS, RA, RB, RQ, RS, 8 — ребра AB, CK', DN и отрезок OS, $4\sqrt{5}$ — ребра MC', MD, MK, ML, MN, $8\sqrt{2}$ — CD, CL, CN, DL', DK', 12 — DM', $12\sqrt{2}$ — CD'.

Вдоль ребер CM', $M'D'$, $D'M$, MS, SP, SR, QC и им симметричных, двугранные углы многогранника Конелли при которых больше 180°, делаются разрезы, ширина которых в 1,5—2 раза больше толщины бумаги. Вдоль остальных ребер производятся неглубокие надрезы, чтобы развертка по ним легко перегибалась. С изнанки на развертку наклеивается тонкая прочная бумага (например, калька) в 1—2 слоя. Размеры последней должны быть такими, чтобы из нее получились и наклейки (шириной 7—8 мм). Затем удаляются квадраты $PQRS$ и $P'Q'R'S'$. Главные части зарубок Конелли склеиваются в положении, показанном на рисунке 2 (ΔABP и ΔABR обращены при этом друг к другу лицевыми сторонами) *).

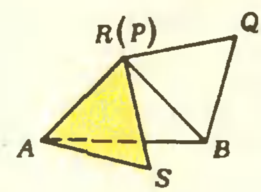


Рис. 2.

После этого зарубки собираются на ребрах CM и $C'M'$, для чего прилегающие к этим ребрам грани надо предварительно сложить лицевыми сторонами внутрь. Дальнейший порядок склеивания указан на наклейках числами 1—8.

Перед последним склеиванием небезынтересно проследить через оставшееся «окошко» за процессом изгибания многогранника Конелли. Размах изгибаний значительно возрастет, если зарубки сделать на четырех ребрах CM, CM', $C'M$, $C'M'$.

А. Медяник

---

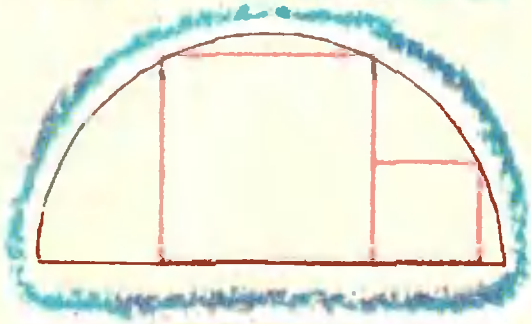
*) Существенным моментом в построении модели был расчет зарубки Конелли, в том числе и расположения последней относительно «лишней» точки соприкосновения. Из свойств четырехзвенного механизма вытекает, например, что такая точка не может быть серединой участка ребра, удаляемого при построении зарубки (см. пп. 4, 5, 7 статьи В. Залгаллера).

Квант для младших школьников

Задачи

1. Заполните пустые клетки на рисунке 1 так, чтобы сумма чисел, стоящих в любых трех подряд идущих клетках, равнялась пятнадцати.

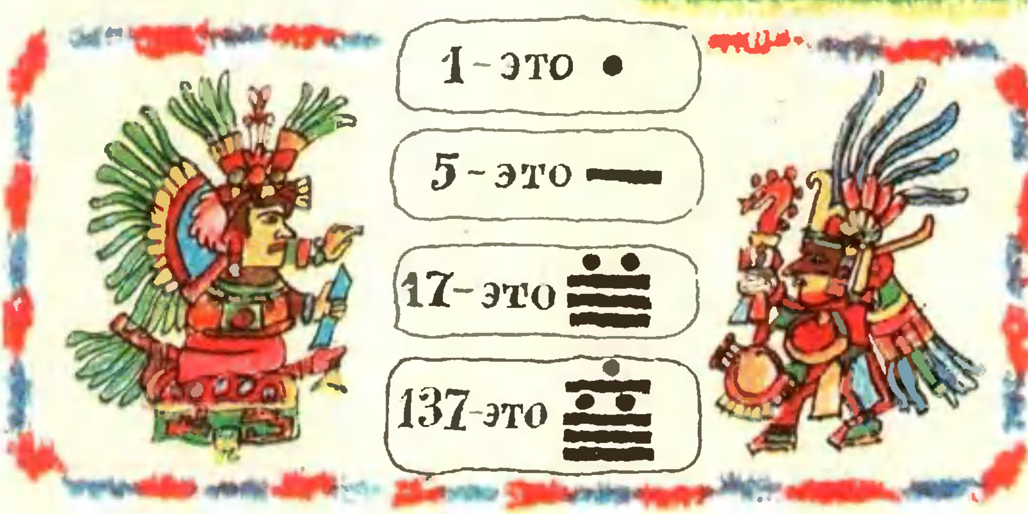
2. На рисунке 2 из спичек римскими цифрами составлено неверное равенство. Переложите одну спичку так, чтобы равенство стало верным.



3. Два квадрата расположены внутри полукруга так, как показано на рисунке 3. Докажите, что площадь большего квадрата в четыре раза превосходит площадь меньшего квадрата.

4. Девять одинаковых книг стоят меньше десяти рублей, а десять таких же книг стоят больше одиннадцати рублей. Сколько стоит одна книга?

5. У народности майя существовал очень интересный способ записи чисел. На рисунке 4 показано, как этим способом записывались числа 1, 5, 17, 137. Установите, почему эту систему счисления считают двадцатеричной, и запишите в ней число 1979.



Г. Меледин

Можно ли проверить ответ?

После решения задачи, особенно сложной, всегда хочется убедиться в правильности полученных результатов или хотя бы в отсутствии ошибок. Существует много способов, позволяющих быстро обнаружить ошибку. Например, можно сравнить свой ответ с ответами других или с ответами, полученными при решении этой же задачи другими методами. Однако такие возможности бывают далеко не всегда.

Рассмотрим несколько приемов, которыми широко пользуются физики. Это — проверка ответа на размерность, проверка на симметрию, исследование частных (или предельных) случаев и, наконец, контроль за областью допустимых значений.

Чтобы можно было проверить ответ одним из этих способов, надо получить его в алгебраической (буквенной) форме.

1. Проверка на размерность не нуждается в особых комментариях — при подстановке размерностей величин, входящих в формулу, в итоге должна получиться размерность искомой величины. (Разумеется, все параметры надо выражать в одной и той же системе единиц.) С точки зрения такой проверки ответ удобно записать так, чтобы сразу была видна его размерность. Для этого обычно выделяют или безразмерные отношения, или устойчивые размерностные сочетания параметров типа $|\vec{v}|^2/g$ (размерность длины), ρgh (размерность давления), $\sqrt{l/g}$ (размерность времени) и т. п.

В качестве примера рассмотрим такую известную задачу:

Задача 1. *Через неподвижный блок перекинута незакрепленная нить, на концах которой подвешены грузы массой m_1 и m_2 (рис. 1). Найти натяжение $|\vec{T}|$ нити при движении грузов.*

Ответ: $|\vec{T}| = \dfrac{2m_1m_2}{m_1+m_2}g$.

Проверим размерность. Произведение масс, деленное на их сумму, имеет размерность массы, а умноженное на ускорение — дает размерность силы. Следовательно, размерности левой и правой частей формулы для натяжения нити совпадают.

2. Проверка на симметрию менее известна. Она заключается в следующем. Если в условие задачи какие-то одинаковые по размерности параметры входят таким симметричным образом, что при перестановке индексов, нумерующих параметры, задача не меняется, то такая же симметрия должна быть и в ответе.

Так, в задаче 1 натяжение нити не зависит от того, слева или справа от блока находится более тяжелый груз и каким из двух индексов — 1 или 2 — обозначена его масса. Значит, ответ не должен измениться при замене m_1 на m_2 и m_2 на m_1. Другими словами, выражение для натяжения нити должно быть симметричным относительно m_1 и m_2. Приведенный ответ этому действи-

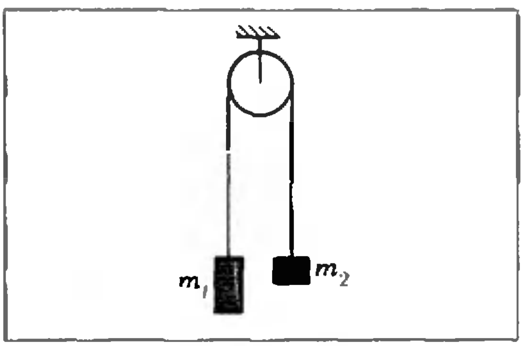


Рис. 1.

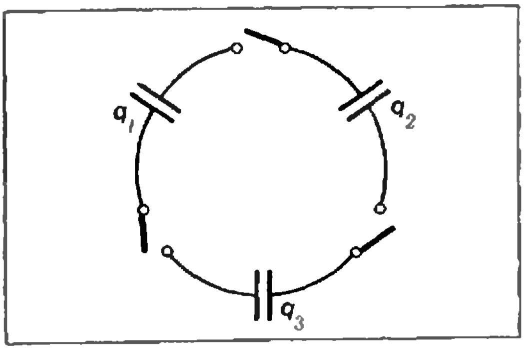


Рис. 2.

тельно удовлетворяет — и произведение, и сумма масс являются симметричными комбинациями параметров m_1 и m_2.

Приведем еще один пример, где есть подобная симметрия.

Задача 2. *Три конденсатора одинаковой емкости имеют заряды q_1, q_2 и q_3 соответственно. Потом их соединяют, как изображено на рисунке 2. Найти установившиеся заряды на конденсаторах.*

Ответ:
$$q_1' = \frac{2q_1 - q_2 - q_3}{3};$$
$$q_2' = \frac{2q_2 - q_1 - q_3}{3};$$
$$q_3' = \frac{2q_3 - q_1 - q_2}{3}.$$

Ясно, что ничего не изменится, если мы последовательно сменим нумерацию зарядов ($q_1 \to q_2$, $q_2 \to q_3$, $q_3 \to q_1$) — это всего лишь поворот картинки. Ответ должен демонстрировать такую же симметрию по отношению к циклическим перестановкам. Несложно убедиться, что наш ответ обладает этим свойством.

Для удобства контроля симметрию по параметрам в ответе надо сохранять.

3. Проверку на частных случаях проводят так. Выбирают простейшие значения параметров задачи, для которых ответ очевиден, и смотрят, дает ли полученная общая формула для этих частных значений параметров такой же результат.

Обратимся еще раз к задаче о блоке. Если любая из масс — m_1 или m_2 — равна нулю, то другая масса свободно падает, и нить не натянута. Такой же нулевой результат получается и из ответа.

(Заметим, что обращение полученного результата в нуль при нулевом значении одного из параметров обычно связано с тем, что этот параметр входит в ответ в виде множителя, может быть — в какой-то степени. В более сложных задачах так бывает лишь в предельных случаях: при очень больших или очень малых значениях выбранного параметра.)

Рассмотрим еще случай равных масс: $m_1 = m_2 = m$. При этом грузы или покоятся, или движутся равномерно. Следовательно, натяжение нити должно быть равно весу одного из грузов. Нетрудно видеть, что формула дает тот же результат.

4. Иногда при проверке на частных случаях обнаруживается несовпадение результата в частном случае и результата, полученного из общей формулы. Обычно это объясняется тем, что взятое наугад частное значение параметра не попало в область допустимых значений. Такая неприятная возможность говорит о необходимости сопровождать ответ указанием области допустимых значений параметров.

Вот характерный пример:

Задача 3. *К телу массой m, находящемуся на горизонтальной поверхности, приложена сила $\vec{F}$, направленная вниз под углом α к горизонту (рис. 3). Коэффициент трения между телом и поверхностью равен k. Найти ускорение тела.*

Типичный ответ:
$$|\vec{a}| = \frac{|\vec{F}|\cos\alpha - k\left(mg + |\vec{F}|\sin\alpha\right)}{m \qquad x}.$$

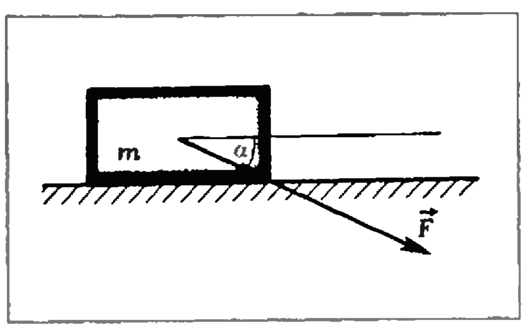


Рис. 3.

Очевидно, что, если тело не тянуть, оно ускоряться не будет. Проверим это: при $|\vec F| = 0$ $|\vec a| = -kg \neq 0$! В чем же дело?

Оказывается, правильный ответ должен быть таким:

$$\begin{cases} |\vec a| = \dfrac{|\vec F|\cos\alpha - k\left(mg + |\vec F|\sin\alpha\right)}{m} \\ \text{при } |\vec F| > \dfrac{kmg}{\cos\alpha - k\sin\alpha}, \\ |\vec a| = 0 \text{ при } 0 \leqslant |\vec F| \leqslant \dfrac{kmg}{\cos\alpha - k\sin\alpha}. \end{cases}$$

Таким образом, для $|\vec F| = 0$ нужно пользоваться не первой, а второй формулой, и тогда никакого противоречия не наблюдается.

В заключение отметим, что всегда, когда в ответе появляется разность под знаком радикала или логарифм, обязательно надо находить область допустимых значений. Особого внимания требует разность в знаменателе; в этом случае надо немедленно проверить, при каких значениях параметров знаменатель может обратиться в нуль. Нередко это приводит к обнаружению ошибки. В нашем случае при $\cos\alpha \leqslant k\sin\alpha$ тело нельзя сдвинуть с места никакой сколь угодно большой силой — произойдет «заклинивание».

Упражнения

1. Лодка длиной L и массой M стоит, приткнувшись носом к берегу. Человек массой m, желая сойти на берег, начинает идти из дальнего конца лодки. На какое расстояние x лодка отойдет от берега, когда человек дойдет до носа лодки? Не решая задачи, выясните, какой из двух ответов правильный:

$$x = \frac{m}{M}L \quad \text{или} \quad x = \frac{m}{M+m}L.$$

(Рассмотрите предельные случаи.)

2. Нарисуйте приблизительно график зависимости проекции f на оптическую ось силы давления света на линзу от расстояния x до точечного источника света, находящегося на главной оптической оси линзы. Размеры линзы считать неограниченно большими, отражение и поглощение света линзой не учитывать. (В качестве частных случаев рассмотрите, например, такие: $x=0$, $x=F$ (F—фокусное расстояние линзы), $x=2F$, $x\to\infty$.)

(*Начало см. с. 20, 32*)

27, 29а); *А. Нурсеитов* (Алма-Ата) **16а), б), 21**; *И. Ныжник* (Новосибирск) **21**; *А. Окропидзе* (Тбилиси) **26**; *А. Опарик* (Москва) **16, 18, 19а), 21, 22, 23б), 24, 26—29, 30а)**; *А. Павлычев* (Рига) **26**; *А. Паландгиян* (Ереван) **26**; *Е. Палош* (Ворошиловград) **16а), 21, 26**; *А. Пантелеев* (Ростов-на-Дону) **26**; *В. Питенко* (Пуховичский р-н Минской обл.) **27, 28**; *А. Пичуговский* (Воронеж) **26**; *Т. Подстригач* (Львов) **19а), 21, 26—28, 30а)**; *Л. Полтерович* (Москва) **16, 24**; *А. Попелюхин* (Киев) **16, 21, 22, 23а), 24, 26—28**; *С. Пошехонов* (Энгельс) **26**; *В. Процишин* (с. Песчаное Павлодарской обл.) **16а)**; *Ч. Пуричамиашвили* (Тбилиси) **16а), 26**; *А. Пурэв* (МНР) **26**; *С. Путинцев* (Невинномысск) **16—25**; *Б. Рабинович* (Тула) **16, 22, 26, 30а)**; *Д. Рамзаев* (Тбилиси) **26**; *В. Рогозин* (Щелково) **16а), б)**; *И. Ройзмон* (п. г. т. Калиновка Винницкой обл.) **27, 28, 30а)**; *И. Савенков* (р. п. Лысые Горы Саратовской обл.) **16, 27, 28, 30а)**; *Ю. Саенко* (Жданов) **26, 30а)**; *Н. Санарцев* (Уфа) **21**; *А. Сарчимелия* (Тбилиси) **26—28, 30**; *С. Севастюк* (Невинномысск) **16а), б)**; *М. Севрюк* (Москва) **16—24, 26—30**; *П. Селиванов* (Семипалатинск) **21, 22, 23а)**; *А. Сивацкий* (Ленинград) **16, 18, 19, 21, 22, 24, 26, 28, 30а)**; *С. Сидоренко* (Брянск) **18**; *М. Случ* (Москва) **21**; *А. Сромин* (Ленинград) **21, 26, 28**; *С. Стадниченко* (Пенза) **16а), б), 21, 22, 24, 26, 28**; *М. Стрешинский* (Донецк) **21**; *Ф. Сукочев* (Ташкент) **16—29**; *О. Тавгень* (Минск) **16а), 27**; *Р. Тагиев* (Масаллинский р-н АзССР) **26**; *К. Таталян* (Ереван) **16, 19а), 21, 27—29, 30а)**; *Д. Тимофеев* (Горький) **16а)**; *М. Торосян* (Ереван) **16а), б), 18, 20—22, 24, 26, 27**; *Н. Трифонов* (Канск) **16а), б), 19а), 20—22, 25, 26, 28**; *В. Трофимов* (Москва) **27**; *Ю. Трофимчук* (п. г. т. Калиновка Винницкой обл.) **26**; *Д. Тураев* (Горький) **18, 19а), 20, 26, 27, 30а)**; *В. Уманский* (Баку) **16а), б), 21, 27, 28**; *А. Унанян* (Севан) **21, 22, 24**; *А. Фатуллаев* (Баку) **26**; *С. Хосид* (Алма-Ата) **16, 18, 19, 21, 24, 26, 28**; *К. Христов* (НРБ) **16, 18, 19а)**; *Л. Цаленко* (Москва) **16, 19а), 21, 22, 24, 26, 28**; *З. Цихиставн* (Телави) **16а), 21**; *А. Чаплыгин* (Николаев) **16а), б), 18, 19а)**; *О. Чечель* (Москва) **26—28**; *В. Шарафян* (Ереван) **18, 26**; *Н. Шаромет* (Москва) **21, 28**; *Г. Шахбазян* (Ленинград) **19а)**; *Е. Шкляр* (Гомель) **21**; *В. Шматенко* (Ангарск) **26**; *М. Эргашев* (Фергана) **16а), б)**; *А. Ялышев* (Тула) **16, 19а), 26, 30а)**; *В. Ясинский* (Винница) **21**.

Физика

В. Абаджаев (Львов) **28, 31**; *К. Абдухаликов* (Алма-Ата) **23, 24**; *Е. Абрамочкин* (Куйбышев) **24**; *Е. Александрова* (Глазов) **24, 26, 28, 29, 31**; *А. Ашкинази* (Москва)

(*Окончание см. с. 58*)

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1978 году

Московский автомобильно-дорожный институт

Институт основан в 1930 г. и является одним из крупнейших высших учебных заведений страны.

В институте обучаются по 14 специальностям более 10 тысяч студентов. В его составе факультеты: *дорожно-строительный, строительства аэропортов, эксплуатации автомобильного транспорта, организации перевозок и движения, дорожных машин, гидравлики и систем управления на транспорте и в строительстве, конструкторско-механический, инженерно-экономический.*

Выпускники института направляются на работу в отраслевые научно-исследовательские институты, конструкторские бюро, заводы автомобильной промышленности, проектные организации, авторемонтные заводы, автотресты, крупные автомобильные хозяйства, органы ГАИ, дорожно-строительные организации.

Срок обучения в институте: дневного — 5 лет, вечернего — 5 лет и 9 месяцев.

Студенты института ведут большую научно-исследовательскую работу в области теоретических и практических проблем автомобильного транспорта и дорожно-строительного машиностроения, дорожно-мостового и аэродромного строительства.

Поступающие в МАДИ сдают вступительные экзамены по следующим дисциплинам: русскому языку и литературе (сочинение); математике (письменно и устно); физике (письменно).

Приемные экзамены проходят с 1 по 20 августа — для дневного обучения, с 11 августа по 1 сентября — для вечернего обучения.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{1}{x}+1$, $x=1$ и касательной, проведенной в точке $\left(2;\ \frac{3}{2}\right)$ к кривой $y=\frac{1}{x}+1$.

3. Решить уравнение
$\cos x-\cos 5x=4\cos x\cdot\sin^2 x$.

4. Решить неравенство

$$\frac{3x+7}{6x-x^2-9}<\frac{1}{x+1}.$$

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}2^{x+y-1}+2^{x-y+1}=3,\\ \frac{1}{7}\cdot 3^{x\cdot\log_3 2+y\cdot\log_3 2-2}+\\ \quad+3^{x\cdot\log_3 2-y\cdot\log_3 2-2}=\frac{1}{7}\end{cases}$$

Вариант 2

1. Найти экстремумы функции $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$ и указать интервалы возрастания и убывания.

2. Вычислить объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=x^3$, $y=1$, $x=3$.

3. Решить уравнение

$$\frac{1}{1+\cos^2 x}+\frac{1}{1+\sin^2 x}=\frac{16}{11}.$$

4. Решить неравенство

$$\log_2\frac{x-4}{2x+5}<1.$$

5. Решить уравнение

$$5^{1+\log_4 x}+5^{\log_{0.25}x-1}=\frac{26}{5}.$$

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Давление. Единицы давления. Закон Паскаля для жидкостей и газов. Принцип устройства гидравлического пресса. Давление жидкости на дно и стенки сосуда при действии на нее силы тяжести. Сообщающиеся сосуды.

2. Тела массой $m_1=3$ кг и $m_2=1$ кг связаны невесомой и нерастяжимой нитью (рис. 1). С каким ускорением $|\vec{a}|$ движется тело массой m_1, если коэффициент трения его о поверхность стола $\mu=0{,}2$? Каково натяжение нити $|\vec{T}|$, связывающей оба тела? Массой блока можно пренебречь. Трение в блоке отсутствует. Плоскость стола горизонтальна.

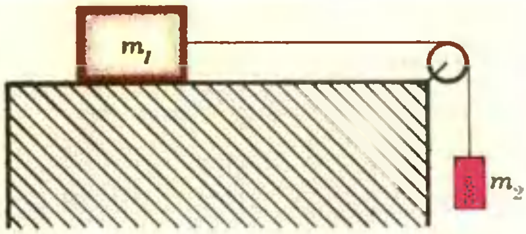


Рис. 1.

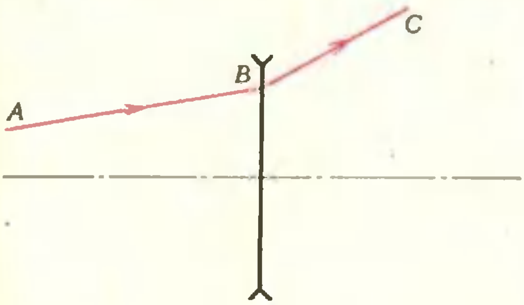


Рис. 2.

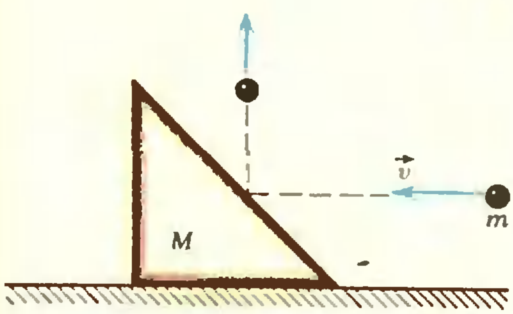


Рис. 3.

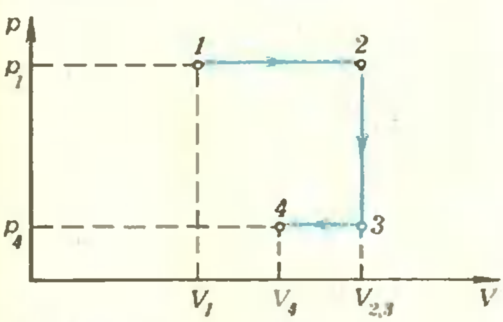


Рис. 4.

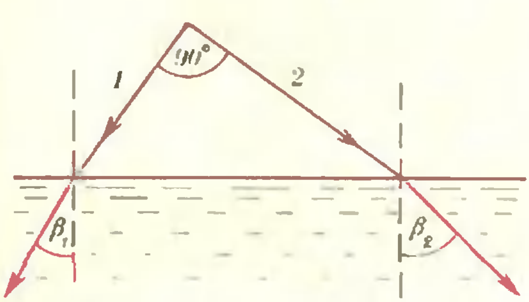


Рис. 5.

3. До какой температуры T_2 нужно нагреть воздух, первоначально находящийся при температуре $T_1=293$ К, чтобы его объем удвоился, если давление при этом не меняется?

4. Определите ЭДС $\mathscr{E}$ и внутреннее сопротивление r аккумулятора, если при токе $I_1=4$ А он отдает во внешнюю цепь мощность $P_1=7{,}2$ Вт, а при токе $I_2=6$А — $P_2=9{,}6$ Вт.

5. На рисунке 2 дан ход луча ABC через тонкую рассеивающую линзу. Определите построением положение главных фокусов линзы. Дайте пояснение. Указание. Используйте метод побочной оси.

Вариант 2

1. Магнитное поле. Магнитная индукция. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле. Сила Лоренца.

2. Шарик массой m, летящий горизонтально со скоростью $\vec{v}$, ударяет в равнобедренную призму массой M и после удара движется вертикально вверх (рис. 3). Считая удар абсолютно упругим, найдите скорости шарика $\vec{v}_1$ и призмы $\vec{v}_2$ после удара. Сопротивлением воздуха и трением призмы о горизонтальную подставку можно пренебречь. Призма до удара покоилась.

3. Состояние газа менялось в соответствии с диаграммой, приведенной на рисунке 4. Известны следующие параметры газа: $p_1=2\cdot10^5$ Па; $p_4=1{,}5\cdot10^5$ Па; $V_1=1$ м^3; $V_{2,3}=2$ м^3; $V_4=1{,}5$ м^3. Вычислите работу, совершенную газом при переходе из состояния *1* в состояние *4*.

4. Два заряда, по $q=10^{-6}$ Кл каждый, находятся на расстоянии $R_1=90$ см друг от друга. Какую работу надо совершить, чтобы сблизить их до расстояния $R_2=30$ см?

5. Взаимно перпендикулярные лучи *1* и *2* (рис. 5) идут из воздуха в жидкость. У первого луча угол преломления $\beta_1=30°$, у второго — $\beta_2=45°$. Найдите показатель преломления n жидкости.

М. Воробьева, Е. Давыдов,
Ю. Рахштадт, Е. Фигуровская,
А. Хохлов, В. Черненький

Московский инженерно-строительный институт им. В. В. Куйбышева

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Двое рабочих за смену изготовили вместе 72 детали. После того, как первый рабочий повысил производительность труда на 15%, а второй на 25%, они стали изготовлять за смену 86 деталей. Сколько деталей изготавливает каждый рабочий за смену после повышения производительности труда?

2. В кубе, ребро которого равно a, центр верхней грани соединен с вершинами основания. Найти полную поверхность образовавшейся пирамиды.

3. Решить уравнение

$$\frac{\lg x}{\lg(3-4x)}=2.$$

4. Решить уравнение

$$\sin^2 x+\cos x+1=0.$$

5. Даны функции $f(x)=4-15x^2-2x^3$ и $\varphi(x)=2x^3+18x+1$. При каких значениях x будет выполняться неравенство $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}>0$?

Вариант 2

1. Для оплаты пересылки четырех бандеролей понадобились 4 различные почтовые марки на общую сумму в 2 р. 80 коп. Определить стоимость марок, приобретенных отправителем, если эти стоимости составляют арифметическую прогрессию, а самая дорогая марка в 2,5 раза дороже самой дешевой.

2. Вычислить отношение площадей квадрата, правильного треугольника и правильного шестиугольника, вписанных в одну и ту же окружность.

3. Найти область определения функции

$$f(x)=\sqrt{\lg(3x^2-2x)}.$$

4. Решить уравнение

$$2\sin 2x+3\operatorname{tg} x-5=0.$$

5. Какой угол образует с осью абсцисс касательная к параболе $y=x^2+4x-17$, проведенная в точке $M(2,5;-0,75)$? Записать уравнение этой касательной.

Устный экзамен

Билет 1

1. Свойства функции $y=\operatorname{tg} x$ и ее график.

5. Теорема косинусов.

3. Найдите восьмой член геометрической прогрессии (b_n), если $b_1=729$ и $q=\frac{2}{3}$.

4. Решите неравенство

$$\frac{\log_5 0,7}{\log_3(-2x-1)-\sqrt{2}}>0.$$

Билет 2

1. Достаточное условие экстремума функции.

2. Признак перпендикулярности двух плоскостей.

3. Решите неравенство

$$\left|\frac{2}{x-4}\right|>1$$

4. Решите уравнение

$$3^{x-5}=7.$$

Физика

Задачи устного экзамена

1. Два автомобиля движутся навстречу друг другу, один — с начальной скоростью $|\vec{v}_1|=36$ км/ч и ускорением $|\vec{a}_1|=0,3$ м/с^2, а второй — с начальной скоростью $|\vec{v}_2|=54$ км/ч и ускорением $|\vec{a}_2|=0,5$ м/с^2. Через сколько времени встретятся автомобили и какое расстояние до встречи пройдет каждый из них, если начальное расстояние между автомобилями $s=250$ м?

2. Деталь отлита из сплава железа и никеля. Определить, какой процент по объему составляют железо и никель, а также объем всей детали, если деталь в воздухе весит $|\vec{P}_1|=33,52$ Н, а в воде — $|\vec{P}_2|=29,60$ Н. Плотность железа $\rho_1=7,8$ г/см^3, никеля $\rho_2=8,8$ г/см^3.

3. Тело массой $m=1$ кг соскальзывает с наклонной плоскости длиной $l=22$ м, которая образует с горизонтом угол $\alpha=30°$. Скорость тела у основания горы равна $|\vec{v}|=4$ м/с. Какое количество теплоты Q выделилось при трении тела о плоскость, если начальная скорость тела была равна нулю?

4. Медный шар диаметром $d=1$ см помещен в масло. Плотность масла $\rho=8\cdot10^2$ кг/м^3, диэлектрическая проницаемость $\varepsilon=5$. Чему равен заряд шара, если в однородном электрическом поле шар оказался взвешенным в масле? Электрическое поле направлено вертикально вверх, и его напряженность $|\vec{E}|=4\cdot10^6$ В/м.

5. Пловец, нырнувший с открытыми глазами, рассматривает из-под воды светящийся предмет, находящийся над его головой на высоте $h=75$ см над поверхностью воды. Какова будет видимая высота H предмета над поверхностью воды? Показатель преломления воды $n=4/3$.

Т. Есина,
В. Пугачева

Московский институт химического машиностроения

Подробно об этом институте можно прочитать в «Кванте», 1978, № 7.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\cos x=\operatorname{tg} x\cdot(1+\cos 2x).$$

2. Решить неравенство

$$\log_{100} x^2+\log_{10}^2 x\leqslant 2.$$

3. Основанием пирамиды служит правильный треугольник. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны к плоскости ее основания, а третья грань образует с плоскостью основания угол α. Высота наибольшей грани пирамиды равна h. Найти ее боковую поверхность.

4. Исследовать функцию $y=2x^3+3x^2-12x+5$ на максимум и минимум.

5. Векторы $\overrightarrow{AB}=(3;\ -2;\ 2)$ и $\overrightarrow{BC}=(-1;\ 0;\ -2)$ являются смежными сторонами параллелограмма. Определить величину угла между его диагоналями $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

Вариант 2

1. Доказать тождество

$$\frac{2\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}{2(\cos\alpha+\cos 3\alpha)}=\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha.$$

2. Решить уравнение

$$3^{1+x}-2\cdot 3^{1-x}=7.$$

3. Угол между диагоналями основания прямоугольного параллелепипеда равен α. Диагональ параллелепипеда равна l и составляет с плоскостью основания угол β. Найти объем параллелепипеда.

4. Найти

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}.$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x-2y+2=0$, $x=2$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. В стеклянный цилиндр диаметром $D=3$ см налито $V=5$ литров масла при температуре $t=20°$C. Какова будет высота столба масла при $t_1=30°$C? Коэффициент линейного расширения стекла $\beta=9\cdot 10^{-6}K^{-1}$, коэффициент объемного расширения масла $\alpha=10{,}18\cdot 10^{-4}$ K^{-1}.

2. В сообщающихся сосудах находится ртуть; диаметр одного сосуда в четыре раза больше диаметра другого. В узкий сосуд наливают воду; высота столба воды $h=80$ см. На сколько опустится уровень ртути в узком сосуде и на сколько он поднимется в широком? Плотность воды $\rho_В=1$ г/см^3, плотность ртути $\rho_{РТ}=13{,}6$ г/см^3.

3. Из баллона выпустили половину массы газа, при этом температура газа понизилась от $t_1=27°$C до $t_2=-73°$C. Во сколько раз уменьшилось давление в баллоне?

4. В комнате, объем которой $V=100$ м^3, температура воздуха понизилась от $t_1=25°$C до $t_2=15°$C. Сколько водяных паров при этом сконденсировалось, если абсолютная влажность насыщающих паров при 25°C равна $\rho_1=23$ г/м^3, а при 15°C — $\rho_2=12{,}8$ г/м^3. Относительная влажность воздуха вначале была равна $r_1=90\%$.

Л. Милованова

Московский институт электронного машиностроения

Подробно об этом институте можно прочитать в «Кванте», 1978, № 6.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$6\sin^2 x+5\cos x-7=0.$$

2. На координатной плоскости заданы точки A (1; 0), B (0; 1) и C (5; 5). Вычислить площадь треугольника ABC и указать все перемещения плоскости, при которых он переходит в себя.

3. Выписать три первых члена последовательности с общим членом

$$x_n=A_{n+2}^3+6C_{n+3}^3.$$

Какие из следующих чисел являются членами этой последовательности: 546, 548, 1978^{1978}?

4. Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции, заданной равенством

$$f(x)=2\ln(x-2)-x^2+4x+1.$$

Построить график этой функции.

5. Решить уравнение

$$f(x)=-f(-|x|),$$

где $f(x)=\ln\left(\sqrt{9\operatorname{tg}^2 x+1}-3\operatorname{tg}x\right)$.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\log_2\left(\frac{\sqrt{14}}{4}+\cos x\right)+\log_2\left(\frac{\sqrt{14}}{4}-\cos x\right)=-3.$$

2. Найти образ точки A (2; 7) при повороте координатной плоскости вокруг точки M (2; 3) на угол $-\frac{\pi}{2}$. Найти образ еще одной точки (по Вашему выбору). Найти образ точки C (−4; 8) при этом повороте.

3. Проверить, какое из чисел больше: C_{11}^6 или $C_{11}^3+C_{11}^4$, и найти все значения n, для которых $C_n^6<C_n^3+C_n^4$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=e^{2x-1}+2e^{1-2x}+7x-3$$

на отрезке [0,14; 1].

5. Назовем число a хорошим, если для всякого x выполняется неравенство

$$\frac{2x^2+2x+3}{x^2+x+1}\leqslant a.$$

а) Доказать, что число 4 является хорошим числом.

б) Найти все хорошие числа.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$2|x-6|\cos x = x-6.$$

2. Даны две вершины равностороннего треугольника A (2; 0) и B (0; 2). Найти его площадь и координаты третьей вершины C. Указать все перемещения плоскости, при которых треугольник ABC отображается на себя.

3. Перечислить все возможные способы распределения обязанностей между пятью туристами, если один из них должен собирать дрова, двое — готовить ужин, а остальные — ставить палатки.

Сколькими способами можно распределить обязанности среди 24 туристов, если требуется составить из них четыре группы, три из которых состоят из четырех человек?

4. Найти все первообразные для функции

$$f(x) = (2x-3)\cdot|x-2|$$

в промежутке $]-3;\ 1[$ и в промежутке $]1;\ 3[$.

5. Найти наименьшее значение функции

$$f(x) = 3x + 2\operatorname{ctg} x \ (x \in\ ]0;\ \frac{\pi}{2}[).$$

Выяснить, имеет ли решение неравенство $f(x) < 4{,}5$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Из точек, расположенных на поверхности Земли на расстоянии $s=35{,}4$ м друг от друга, одновременно бросают два тела под углами $\alpha_1=60°$ и $\alpha_2=30°$ к горизонту таким образом, что горизонтальные составляющие скоростей тел направлены навстречу друг другу. Через сколько времени после начала движения тела столкнутся в воздухе? Скорость первого тела $\vec{v}_1$ такова, что если бы не произошло столкновения, оно приземлилось бы в той точке, из которой было брошено второе тело.

2. Три тела одинаковой массой $m=1$ кг лежат друг на друге, как показано на рисунке 1. Коэффициент трения между телами 1 и 2 равен $k_1=0{,}1$, а между телами 2 и 3 — $k_2=0{,}2$. Коэффициент трения между телом 3 и полом — $k_3=0{,}1$. Тело 2 тянут с некоторой горизонтальной силой $\vec{F}$. При какой абсолютной величине силы $\vec{F}$ возможно такое движение этих трех тел, при котором тела 1 и 3 остаются в покое друг относительно друга? Определить ускорения $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ всех трех тел при этом движении.

3. Доска какой наибольшей длины L_{max} может быть забита между двумя вертикальными стенками, расположенными на расстоянии $l=2$ м друг от друга (рис. 2), если коэффициент трения между доской и стенками $k=0{,}2$? Доску рассматривать как недеформирующуюся и весом ее пренебречь.

4. При ударе о горизонтальную плиту тело потеряло $f=0{,}11$ своей энергии. Непосредственно перед ударом тело имело скорость $\vec{v}_0$ $(|\vec{v}_0| = 4{,}9$ м/с$)$, направленную под углом $\alpha=60°$ к горизонту. На каком расстоянии s от места удара тело вторично столкнется с плитой? Трение при ударе между плитой и телом отсутствует.

5. Тело совершает гармонические колебания с частотой $\nu=1$ Гц. Написать

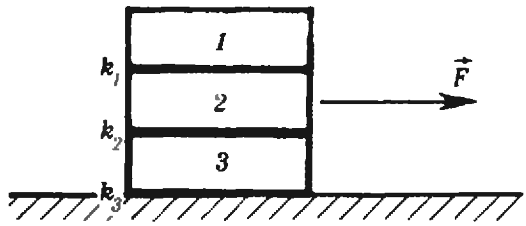


Рис. 1.

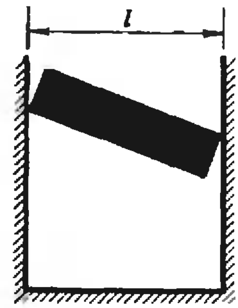


Рис. 2.

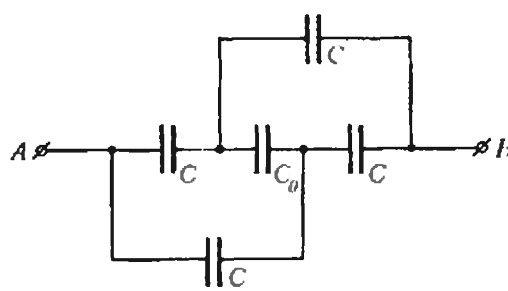


Рис. 3.

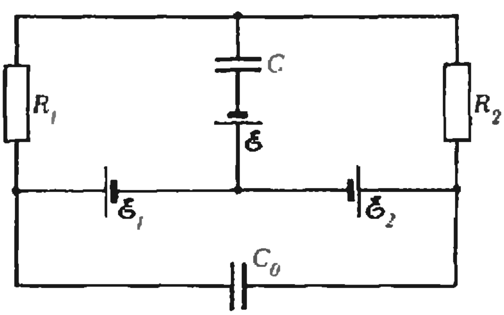


Рис. 4.

уравнение колебаний этого тела, если полная энергия тела $E=600$ эрг, максимальная возвращающая сила $F_м=3\cdot10^{-3}$ Н, а начальная фаза $\varphi_0=30°$.

6. В цилиндре под невесомым поршнем площадью $S=100$ см^2 находится $M=1$ кг воды при температуре $t_0=0°$С. В цилиндре включают нагреватель мощностью $P=500$ Вт. На сколько поднимется поршень за $t=15$ мин работы нагревателя, если атмосферное давление $p=760$ мм рт. ст., а удельная теплота парообразования воды $\lambda=539$ кал/г? Считать, что все джоулево тепло идет на нагревание воды.

7. Определить заряд батареи конденсаторов, изображенной на рисунке 3, если к клеммам AB приложено напряжение $U=100$ В, а емкости конденсаторов равны $C=2$ мкФ и $C_0=1$ мкФ.

8. Определить заряды конденсаторов емкостью $C=4$ мкф и $C_0=2$ мкф (рис. 4), если $R_1=100$ Ом, $R_2=300$ Ом, $\mathscr{E}_1=10$ В, $\mathscr{E}_2=15$ В и $\mathscr{E}=5$ В. Внутренние сопротивления источников тока равны нулю.

9. В широкий сосуд с плоским дном, наполненный водой, помещена линза, фокусное расстояние которой в воде равно $F=22$ см. Линза расположена горизонтально и окружена непрозрачным плоским экраном. Дно сосуда находится в фокальной плоскости линзы. Найти диаметр D светлого пятна на дне сосуда, если поверхность воды освещается рассеянным светом. Показатель преломления воды $n=1,33$.

10. Телескоп имеет объектив с фокусным расстоянием $F_{об}=150$ см и окуляр с фокусным расстоянием $F_{ок}=10$ см. Изображение объекта, сформированное объективом, рассматривается в окуляр как в лупу. Каков угловой размер γ полной Луны, рассматриваемой в этот телескоп, если при наблюдении невооруженным глазом ее угловой размер $\gamma'=31'$?

Г. Ефашкин,
В. Тонян

Московский экономико-статистический институт

В настоящее время МЭСИ занимает ведущее положение в стране по подготовке экономистов-статистиков и инженеров-экономистов по механизированной обработке экономической информации. Ведется также подготовка кадров по специальностям «экономическая кибернетика», «прикладная математика» и «автоматизированные системы управления».

В институте имеются следующие факультеты:

1. *Факультет статистики* готовит экономистов по специальности «статистика». Факультет имеет дневное и вечернее отделения.

2. *Факультет механизированной обработки экономической информации* готовит специалистов по двум специальностям: «организация механизированной обработки экономической информации» и «автоматизированные системы управления».

3. *Факультет экономической кибернетики* готовит специалистов по двум специальностям: «экономическая кибернетика» и «прикладная математика».

4. *Заочный факультет* готовит специалистов по двум специальностям: «организация механизированной обработки экономической информации» и «статистика».

Абитуриенты, избравшие специальности «организация механизированной обработки экономической информации», «прикладная математика» и «автоматизированные системы управления», сдают экзамены: математика (два экзамена письменно), физика (письменно), русский язык и литература (сочинение). Абитуриенты, желающие получить специальности «статистика» и «экономическая кибернетика», сдают экзамены: математика (два экзамена письменно), история СССР (устно), русский язык и литература (сочинение).

Институт имеет подготовительное отделение с дневной формой обучения. Прием документов с 1 октября по 10 ноября.

На письменных вступительных экзаменах по математике и физике в МЭСИ каждый абитуриент получает свой «вариант». (Варианты комплектуются вычислительной машиной.) Поэтому мы печатаем не варианты, а типовые задачи.

Математика

1. В каждом из двух сосудов содержится некоторое количество воды. Если из первого сосуда перелить во второй 25% имеющегося в нем количества воды, то во втором сосуде окажется воды вдвое больше, чем в первом. Если же, наоборот, из второго сосуда перелить в первый 11 литров воды, то в первом сосуде окажется втрое больше воды, чем во втором сосуде. Сколько литров воды было первоначально во втором сосуде?

2. Из двух городов выехали одновременно навстречу друг другу два автомобиля. Первый автомобиль за три часа прошел 0,08 всего расстояния между городами, а второй — за 2,5 часа 7/120 этого расстояния. Найти (в км/ч) скорость второго автомобиля, если до места встречи первый автомобиль прошел 800 км.

3. Упростить выражение

$$\left[\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2+3\right]:\left[\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2+3\right]:\frac{a^3+1}{a^3-1}-\frac{2a}{a-1}.$$

4. Вычислить выражение $\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha$, если известно, что $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=3$.

5. Вычислить без таблиц

$$-2\sqrt{2}\sin 10°\cdot(2\sin 35°-0,5\sec 5°-$$
$$-\cos 40°\cdot\operatorname{cosec} 5°).$$

6. Найти действительный корень уравнения

$$\frac{x+8}{x^3-2x+16}+\frac{x^3-2x+16}{x+8}=-2.$$

7. Найти (в градусах) наибольшее решение уравнения

$$3\sin^2 x-3+\sin^2 x\cdot(\operatorname{tg} x+1)=\frac{3}{2}\sin 2x,$$

удовлетворяющее условиям $-90°\leqslant x\leqslant 90°$.

8. Найти коэффициент b в уравнении $5x^2+bx-28=0$, если известно, что корни уравнения находятся в зависимости $5x_1+2x_2=1$ и b — целое число.

9. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x^2}+y=5,\\ y^2-x=7,\end{cases}$$

считая $x<-3$, и вычислить $3x-6y$.

10. При каком k система уравнений

$$\begin{cases}(k-2)x+27y=4{,}5,\\ 2x+(k+1)y=-1\end{cases}$$

имеет бесчисленное множество решений?

11. Найти наибольшее целое значение x, удовлетворяющее неравенству

$$6^{x+1}+3^{x+1}<3^{x+2}-6^x+3^x.$$

12. Из круга радиуса $3\sqrt[6]{\frac{675}{4\pi^2}}$ вырезан сектор, который свернут в коническую поверхность. Подобрать центральный угол сектора так, чтобы полученный конус имел наибольший объем. В ответе записать величину этого объема.

13. Найти высоту конуса наименьшего объема, описанного около полушара радиуса $R=\sqrt{3}$ так, чтобы центр основания конуса лежал в центре шара.

14. Дан треугольник ABC, у которого $|AB|=15$, $|BC|=12$, $|AC|=18$. Центр вписанной окружности O делит биссектрису угла C на две части: CO и OD. Во сколько раз $|CO|$ больше $|OD|$?

15. В прямоугольном треугольнике медианы острых углов равны $\sqrt{156}$ и $\sqrt{89}$. Найти его гипотенузу.

16. Даны три утверждения:

а) трехчлен x^2+x+a неотрицателен при всех x;

б) функция $y=\log_{2a}x$ убывает;

в) система

$$\begin{cases}x^2+y^2=a,\\ y+\cos x=2\end{cases}$$

имеет единственное решение.

При каком наименьшем значении параметра a два из этих утверждений верны, а одно неверно?

Физика

1. В последнюю секунду свободно падающее тело прошло половину своего пути. С какой высоты падало тело? Принять $g=10$ м/с², $\sqrt{2}=1{,}4$.

2. Человек массой $m_ч=80$ кг переходит с носа на корму лодки длиной $l_л=5$ м. Какова масса лодки, если она за время этого перехода переместилась в стоячей воде в обратном направлении на $l=2$ м? Сопротивление воды мало.

3. Уклон участка шоссе равен $\alpha=0{,}05$. Спускаясь под уклон при выключенном моторе, автомобиль массой $m=1{,}5$ т движется равномерно со скоростью $|\vec{v}|=60$ км/ч. Какова должна быть мощность мотора автомобиля, чтобы он мог подниматься по этому склону с той же скоростью? Принять $g=10$ м/с².

4. В баллоне емкостью $V=10^{-3}$ м³ находится газ под давлением $p=0{,}5\cdot10^5$ Па. Сколькими ходами поршневого насоса, емкостью $V_0=200$ см³, можно откачать воздух из баллона до давления $p_n=6{,}65$ Па? Ответ округлить до целого числа.

5. С какой скоростью свинцовая пуля должна удариться о преграду, чтобы расплавиться, если до удара температура пули была $t=127$°C? При ударе в тепло превращается $\eta=80\%$ энергии пули. Удельная теплоемкость свинца $c=1{,}2\times10^2$ Дж/(кг·К); температура плавления свинца $T_{пл}=600$ К; удельная теплота плавления $\lambda=2{,}5\cdot10^4$ Дж/кг.

6. Два невесомых одинаково заряженных шарика подвешены в воздухе на тонких шелковых нитях длиной $l=1$ м, причем одна из нитей закреплена в вертикальном положении, а другая, массой $m=5\cdot10^{-3}$ кг, — свободная. Определить, при какой величине зарядов нить отклонится на угол $\alpha=6°$ ($g=10$ м/с²; $\sin\alpha=0{,}1$).

7. Вольтметр со шкалой, рассчитанной на $U_V=5$ В, имеет внутреннее сопротивление $R_V=200$ Ом. Определить величину добавочного сопротивления, которое необходимо подключить к вольтметру, чтобы измерять напряжения до $U=100$ В.

8. Электрический чайник имеет две обмотки. При включении одной из них чайник вскипает через $t_1=10$ мин, при включении другой — через $t_2=15$ мин. Через сколько времени вскипит чайник, если эти обмотки включить параллельно?

9. Определить ЭДС индукции $\mathscr{E}$, возникающую на концах крыльев турбореактивного самолета, летящего горизонтально со скоростью $|\vec{v}|=900$ км/ч, если размах крыльев самолета $l=36$ м, а вертикальная проекция индукции магнитного поля Земли $B_y=5\cdot10^{-5}$ Т.

10. Линза дает действительное изображение предмета с увеличением $\Gamma=2$. Определить фокусное расстояние линзы F, если расстояние между линзой и изображением $f=24$ см.

Ю. Коровин,
М. Мирошникова

Ленинградское высшее ордена Ленина Краснознамённое училище железнодорожных войск и военных сообщений им. М. В. Фрунзе

В одном из красивейших мест Ленинграда, на Мойке 96, расположено Ленинградское высшее ордена Ленина Краснознаменное училище железнодорожных войск и военных сообщений имени М. В. Фрунзе — одно из старейших военно-учебных заведений Советских Вооруженных Сил. Созданное в марте 1918 года, оно по праву является ровесником Октября. Училище в 1969 году переведено в разряд высших военных учебных заведений Вооруженных Сил СССР.

Училище готовит высококвалифицированных офицеров — командиров и инженеров — для железнодорожных войск и органов военных сообщений.

На *командных факультетах* (срок обучения 4 года) готовятся офицеры с высшим военно-специальным образованием; они получают квалификацию инженера по строительству железных дорог, искусственных сооружений (мостов, тоннелей и т. д.), по ремонту и эксплуатации железнодорожного транспорта и устройств автоматики, телемеханики и связи.

На *инженерном факультете* (срок обучения 5 лет) курсанты готовятся по тем же специальностям, что и на командных факультетах, за исключением специальностей «эксплуатация железнодорожного транспорта» и «эксплуатация устройств автоматики, телемеханики и связи», но получают более глубокую инженерную подготовку.

Для органов военных сообщений училище готовит офицеров на командном факультете, где они получают квалификацию инженера по эксплуатации железнодорожного (водного, воздушного) транспорта.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростить выражение

$$\frac{(\sqrt[3]{a}-b\ \ )^2+4\sqrt[6]{a^2b^3}}{\left(a^{\frac{2}{3}}-b\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}\sqrt{b}+b\right)}-\left(\frac{a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}-a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{7}{6}}}{a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{6}}+b^{-\frac{1}{3}}}\right)^{-1}$$

2. В разложении $\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)^{16}$ найти член, содержащий x в восьмой степени.

3. Решить уравнение

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{7}{8}+\frac{1}{2}\cos x\cdot\cos 3x.$$

4. Доказать тождество

$$16\sin 10^\circ\times\sin 30^\circ\times\sin 50^\circ\times\sin 70^\circ\times\times\sin 90^\circ=1.$$

5. В конус вписан шар, поверхность которого равна площади основания конуса. Найти косинус угла при вершине в осевом сечении конуса.

Вариант 2

1. Упростить выражение

$$\frac{\sqrt{x\left[(x+3)^2-12x\right]}}{\sqrt[4]{x}-\dfrac{3}{\sqrt[4]{x^3}}}.$$

2. Решить уравнение

$$\log_4(x+12)\cdot\log_x 2=1.$$

3. Решить уравнение

$$\sin 2x+\cos 2x+\sin x+\cos x+1=0.$$

4. Найти отношение поверхности и объема шара соответственно к поверхности и объему вписанного в шар куба.

5. Найти площадь, ограниченную линиями $xy=7$, $y=0$, $x=4$, $x=12$.

Устный экзамен

Билет 1

1. Теорема о непрерывности дробно-линейной функции.
2. Свойства функции $y=\operatorname{tg} x$ и ее график.
3. Формула синуса суммы и разности двух аргументов.
4. Вычислить

$$49^{1-\log_7 2}-5^{-\log_5 4}.$$

Билет 2

1. Предел числовой последовательности.
2. Центр симметрии параллелограмма.
3. Первообразная. Теорема об общем виде всех первообразных.
4. Доказать тождество

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha+\sec 2\alpha.$$

Физика

Задачи устного экзамена

1. Лифт, поднимаясь равноускоренно в течение первого промежутка времени $t_1=2$ с, достигает скорости $|\vec{v}_1|=4$ м/с, с которой продолжает подъем в течение второго промежутка времени $t_2=4$ с. Затем лифт движется равнозамедленно, и к концу третьего промежутка $t_3=3$ с он останавливается. Определить высоту подъе-

ма лифта. Задачу решить графическим методом.

2. Определить высоту телевизионной башни в Останкино, если шарик, падая с башни без начальной скорости, последние $h=185$ м пути пролетел за $t=2$ с. Сопротивлением воздуха пренебречь.

3. С какой силой будет давить человек ($m=70$ кг) на пол лифта, если лифт будет подниматься вертикально вверх с ускорением $|\vec{a}|=1$ м/с^2?

4. Барометрическая трубка, заполненная ртутью, погружена в сосуд со ртутью открытым концом вниз. Диаметр внутреннего сечения трубки равен $d=2$ мм. Разность уровней ртути в трубке и сосуде равна $h=760$ мм. Чему равно атмосферное давление? Плотность ртути $\rho=13{,}6$ г/см^3, коэффициент поверхностного натяжения ртути $\sigma=4{,}7\cdot10^{-1}$ Н/м.

5. Объектив фотоаппарата «Зенит-С» имеет фокусное расстояние $F=5$ см. С какого расстояния сделан снимок дома высотой $H=6$ м, если высота его изображения на негативе равна $h=24$ мм?

6. Определить энергию связи ядра $^{235}_{92}\mathrm{U}$. Масса ядра $^{235}_{92}\mathrm{U}$ равна $m_я=234{,}99331$ а. е. м., масса протона равна $m_p=1{,}00728$ а. е. м., масса нейтрона равна $m_n=1{,}00866$ а. е. м., 1 а. е. м. $=1{,}6605\cdot10^{-27}$ кг.

О. Недзвецкий,
И. Торопов

Ленинградский гидрометеорологический институт

Ленинградский гидрометеорологический институт, организованный в 1930 г. на базе географического факультета Московского университета, является первым в мире специализированным вузом по подготовке метеорологов, гидрологов и океанологов высшей квалификации.

Метеорологический факультет готовит инженеров-метеорологов по четырем специализациям: «метеорологические прогнозы», «численные методы прогноза погоды», «долгосрочные прогнозы погоды» и «гидрометеорологические измерения и приборы». Окончившие метеорологический факультет работают в качестве инженеров или научных сотрудников гидрометеорологических обсерваторий и бюро, на авиаметеорологических станциях, в аэропортах, научно-исследовательских институтах, учреждениях Гидрометслужбы СССР.

Гидрологический факультет готовит инженеров-гидрологов — специалистов по изучению водных объектов суши. Окончившие гидрологический факультет работают в оперативных и научно-исследовательских учреждениях Гидрометслужбы СССР, в проектных учреждениях различных ведомств по проектированию и эксплуатации технических объектов коммунального водоснабжения, гидроэлектростанций, водохранилищ, каналов, участвуют в осуществлении таких важных народнохозяйственных мероприятий, как орошение пустынь, осушение болот, создание искусственных русел, изменение направления рек и т. д.

Океанологический факультет готовит инженеров-океанологов по двум специализациям: «физическая океанология» и «химия океана». После окончания института инженеры-океанологи работают в учреждениях Гидрометслужбы СССР, научно-исследовательских институтах АН СССР, министерства рыбного хозяйства и других ведомств.

Поступающие сдают экзамены по русскому языку и литературе (сочинение), математике (устно и письменно), физике (устно).

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Доказать, что при $x<0$ справедливо равенство

$$\sqrt{2\left(\sqrt{1+\left(\frac{3^{2x}-3^{-2x}}{2}\right)^2}-1\right)}=3^{-x}-3^{x}.$$

2. Найти x, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{1}{C_4^x}=\frac{1}{C_5^x}+\frac{1}{C_6^x},$$

где C_n^x — число сочетаний.

3. Решить уравнение

$$\sin^2(2\pi-x)-2\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\cos x\times\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)-\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)+1=0.$$

4. Решить систему

$$\begin{cases}x^2+xy+y^2=a^2,\\ x+\sqrt{xy}+y=b,\end{cases}$$

если $x>0$, $y>0$.

Вариант 2

1. Доказать, что при $a>0$ справедливо равенство

$$\frac{a^3-a-2b-\dfrac{b^2}{a}}{\left(a+\sqrt{a+b}\right)\left(1-\sqrt{\dfrac{1}{a}+\dfrac{b}{a^2}}\right)}:\left(\frac{a^3+a^2+a^2b+ab}{a^2-b^2}+\frac{b}{a-b}\right)=a-b.$$

2. Решить систему

$$\begin{cases}x\sqrt{x}-y\sqrt{y}=a(\sqrt{x}-\sqrt{y}),\\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=b(\sqrt{x}+\sqrt{y}).\end{cases}$$

3. Решить уравнение

$$(1+\sin 2x)(\cos x-\sin x)=1-2\sin^2 x.$$

4. В разложении бинома $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{x^4}\right)^n$ биномиальный коэффициент второго члена на 44 больше, чем коэффициент первого члена. Найти член, не содержащий x.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Санки скатываются с горы высотой $h=8$ м по склону длиной $l=100$ м. Масса санок с седоком $m=90$ кг. Какова в среднем сила сопротивления движению санок, если в конце спуска они имели скорость $|\vec{v}|=11$ м/с?

2. Стальной осколок снаряда, падая с высоты $h=500$ м, имел у поверхности Земли скорость $|\vec{v}|=50$ м/с. На сколько градусов увеличится температура осколка при падении? Считать, что все тепло идет на нагревание осколка. Удельная теплоемкость стали $c=460$ Дж(кг·К).

3. На каком расстоянии от центра ядра находится электрон в атоме водорода, если скорость его движения по орбите $v=2{,}2\cdot 10^6$ м/с? Какова напряженность поля, создаваемого ядром в точках орбиты? Заряд электрона $e=1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл, масса электрона $m=9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг.

4. Из центра плота в воду на глубину $h=10$ м опущена электрическая лампочка. Какие минимальные размеры (длину и ширину) должен иметь плот, чтобы ни один луч от лампочки не мог перейти через поверхность воды? Абсолютный показатель преломления воды $n=1{,}33$.

А. Балуева, В. Сирота, В. Шабут

Ленинградский институт точной механики и оптики

Современные приборы, предназначенные для целей исследования, измерения или управления, являются сложными, комплексными устройствами. В них органически сочетаются новейшие достижения физики, электроники, оптики, вычислительной техники, воплощены опыт и принципы конструирования, а также технологические разработки последних лет.

В связи с этим возникает необходимость подготовки инженеров-приборостроителей нового типа, которые должны обладать глубокими знаниями в области фундаментальных наук, твердыми теоретическими знаниями и практическими навыками, необходимыми для проектирования, исследования, организации и эксплуатации измерительно-информационных комплексов. Созданный в 1930 году Ленинградский институт точной механики и оптики (ЛИТМО) является ведущим политехническим приборостроительным вузом, который выпускает инженеров-исследователей, конструкторов и технологов по восьми специальностям и восемнадцати специализациям.

Инженерно-физический факультет готовит инженеров-исследователей по приборам квантовой электроники, спектральным и оптико-физическим приборам (в том числе голографическим), теплофизике, оптико-электронным приборам систем управления.

Факультет точной механики и вычислительной техники готовит инженеров по приборам для измерения времени, ускорений, скоростей, линейных размеров и других физических величин, а также по проектированию и расчету бортовых приборов управления и бортовых контрольно-информационных систем. Факультет имеет крупный вычислительный центр, оснащенный машинами серии ЕС, а также малогабаритными ЭВМ, в котором проходят подготовку все студенты института.

Крупнейший в стране *оптический факультет* готовит инженеров по оптическому приборостроению: расчету и исследованию оптических систем, конструированию и технологии оптических приборов (астрогеодезических, навигационных, фотографических приборов, высокоскоростной киноаппаратуры, телевизионной оптической, гидросъемочной аппаратуры и др.).

Выпускники института получают квалификацию инженеров соответствующей специальности и работают на приборостроительных заводах и в научно-исследовательских институтах разного профиля.

В институте имеются два вечерних факультета и подготовительное отделение. Для всех абитуриентов ежегодно с 1 октября по 1 августа организуются подготовительные курсы.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростить выражение

$$b\left[\left(\frac{a\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a^2b^3}}{\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{a^2b}}-\sqrt[4]{ab}\right):\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)-\sqrt[4]{a}\right]^{-4}.$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{\lg(1-x)}+5\lg(1-x)=6.$$

3. Решить уравнение

$$\sin\frac{10x+9\pi}{2}+\sin 3(x+\pi)+\sin\frac{3\pi-2x}{2}=\cos\frac{15}{2}\pi.$$

4. Написать уравнения касательных к кривой $y=x(x-1)$ в точках пересечения ее с осью Ox.

5. Найти член разложения $\left(x+\frac{1}{2}y\right)^9$, содержащий x^6.

Вариант 2

1. Упростить выражение

$$\left(1-\frac{1+ab}{1+\sqrt[3]{ab}}\right):\left[\sqrt{ab}\left(1-\sqrt[3]{ab}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{(1-ab)\left(\sqrt[3]{ab}-1\right)}{1+\sqrt{ab}}\right]\Bigg\}^3-ab.$$

2. Решить уравнение

$$\cos\frac{\pi-2x}{2}+\sin\frac{5\pi+2x}{2}=\operatorname{tg}\frac{13\pi}{4}.$$

3. Решить неравенство

$$2\sqrt{x^2}\geq(x-1)^2+2.$$

4. Доказать равенство

$$C_{n+2}^{m+1}+2C_{n+2}^{m+2}+C_{n+2}^{m+3}=C_{n+4}^{m+3}.$$

5. Число 12 разбить на два слагаемых так, чтобы сумма кубов этих слагаемых была наименьшей.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Какую часть периода груз маятника, совершающего гармонические колебания, находится в пределах 1 см от положения равновесия, если амплитуда колебаний равна 2 см?

2. В сосуде объемом $V=10$ л при температуре $t_1=20°C$ влажность воздуха $r=80\%$. Температура упала до $t_2=5°C$. Вся сконденсированная влага собралась в шаровую каплю. Какой заряд надо сообщить капле, чтобы ее потенциал стал равным $\varphi=1$ В? Плотности насыщенного пара при температурах t_1 и t_2 равны, соответственно, $\rho_1=17{,}3$ г/м³ и $\rho_2=6{,}8$ г/м³. Плотность воды $\rho_в=1$ г/см³.

3. К двум одинаковым плоским воздушным конденсаторам, соединенным последовательно, подключен источник ЭДС. Как изменится напряженность электрического поля между пластинами одного из них, если в другой внести диэлектрик с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=9$, заполняющий весь конденсатор полностью?

4. Найти отношение потенциальной энергии $W_п$ электрона к его кинетической энергии $W_к$ в боровском атоме водорода.

5. К двукратно ионизированному атому урана ^{238}U приближается издалека протон вдоль линии центров. Какова была начальная скорость протона, если он приблизился к иону урана на минимальное расстояние $R=0{,}5$ Å? Заряд и масса протона равны, соответственно, $q=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл и $m=1{,}67\cdot10^{-27}$ кг.

6. В электролитической ванне происходит покрытие детали никелем. Зная напряжение U между электродами, удельное сопротивление электролита ρ, расстояние l между электродами, найти скорость покрытия (то есть скорость увеличения толщины h слоя никеля). Электрохимический эквивалент никеля равен k, плотность никеля — $\rho_н$.

7. На высоте h над поверхностью воды расположен точечный источник света S. Где будет находиться изображение S' этого источника, даваемое плоским зеркальным дном сосуда, если смотреть по вертикали вниз? Глубина сосуда с водой d, показатель преломления воды $n=4/3$.

8. На оптической оси собирающей линзы на расстоянии $d=25$ см от линзы помещен точечный источник света. По другую сторону линзы — один раз на расстоянии $a=27$ см, другой раз на расстоянии $b=48$ см — ставится экран. Освещенность центра светового пятна на экране в обоих случаях оказывается одинаковой. Определить фокусное расстояние F линзы.

9. Карманный дозиметр радиоактивного облучения представляет собой воздушный конденсатор, заряженный до определенной разности потенциалов. Под влиянием облучения газ ионизируется, и ионы, перемещаясь к пластинам конденсатора, понижают разность потенциалов. При облучении в 1 рентген в каждом кубическом сантиметре воздуха при нормальных условиях образуется $n_0=2\cdot10^9$ пар ионов. Сколько рентген покажет дозиметр, если при емкости конденсатора $C=3\cdot10^{-12}$ Ф разность потенциалов снизилась от $\varphi_1=180$ В до $\varphi_2=160$ В? Объем камеры $V=1{,}8$ см³.

10. Какое количество фотонов с длиной волны $\lambda=0{,}6$ мкм будет иметь в параллельном пучке суммарный импульс, равный среднему импульсу теплового движения атома гелия при температуре $T=300$ К? Масса атома гелия $m=6{,}65\times10^{-27}$ кг, постоянная Планка $h=6{,}62\times10^{-34}$ Дж·с, постоянная Больцмана $k=1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К.

А. Бегункова, Т. Виноградова, В. Кобушкин, И. Никитина, Н. Стреляева, Т. Федорова

Ленинградский кораблестроительный институт

Ленинградский ордена Ленина кораблестроительный институт — крупнейший и ведущий вуз страны, выпускающий инженеров-кораблестроителей, одно из наиболее значительных высших учебных заведений Ленинграда.

Кораблестроительный факультет готовит инженеров-кораблестроителей по проектированию и постройке морских судов, танкеров, контейнерных судов, ледоколов, судов с динамическими принципами поддержания — на подводных крыльях и воздушной подушке, а также новых для техники средств освоения океана. Факультет выпускает также инженеров-исследователей в области гидроаэродинамики, динамики и прочности судовых конструкций, гидроакустики, автоматического управления движением судов, прикладной и вычислительной математики; готовятся также инженеры-технологи для промышленности и проектных организаций. Выпускники факультета работают на судостроительных заводах, в конструкторских бюро и научно-исследовательских институтах.

Специальности *факультета корабельной энергетики* — судовые силовые установки, парогенераторы, паровые и газовые турбины, двигатели внутреннего сгорания, автоматизация теплотехнических процессов.

Приборостроительный факультет готовит инженеров-механиков и инженеров-электромехаников по проектированию и производству морских устройств для освоения мирового океана, а также по использованию и разработке приборов и автоматических систем управления для различных типов судов и морских устройств.

Выпускники *инженерно-экономического факультета* призваны руководить экономикой и хозяйственной деятельностью предприятий судостроительной промышленности, они участвуют также в исследованиях в области экономики, автоматизации управления и организации производства.

При институте имеются вечерний факультет, заочный факультет и подготовительное отделение.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Установите область определения выражения и упростите его:

$$\left(\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right):\frac{4\sqrt{a^4-a^2b^2}}{(5b)^2}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x}+3\operatorname{tg} x-\frac{5}{\sin x}=0.$$

3. Решите уравнение

$$\lg\left(64\left(2^{x^2-40x}\right)^{\frac{1}{24}}\right)=0.$$

4. Покажите, что при любых действительных значениях x функция $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$ не может иметь значений, больших $3/2$ и меньших $1/2$.

5. Найдите координаты точки M, лежащей на оси Ox и одинаково удаленной от точек A (1; 2; 3) и B (−3; 3; 2).

Вариант 2

1. Установите область определения выражения и упростите его:

$$\frac{3a^2+2ax-x^2}{(3x+a)(a+x)}-2+10\frac{ax-3x^2}{a^2-9x^2}.$$

2. Решите уравнение

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3=\frac{1}{4}\sin^2 2x.$$

3. Решите уравнение

$$3\sqrt{\log_3 x}-\log_3 3x=1.$$

4. Установите область допустимых значений функции

$$y=(2x+8-x^2)^{-\frac{1}{2}}+\log_{0,8}(x-1).$$

5. Составьте уравнения касательных к кривой $y=x^2+2x-3$ в точках ее пересечения с осью абсцисс.

Г. Дмитриев, Н. Коптева, Л. Рябов

Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина

Ленинградский политехнический институт, основанный в 1899 г., — один из крупнейших вузов страны.

Широк диапазон специальностей, по которым ведется обучение. Те, кто желает работать над проблемами, связанными с передовыми направлениями современной физики, учатся на *физико-механическом*, *радиофизическом* и *электромеханическом факультетах*. По специальности «вычислительная математика» ведется подготовка инженеров-математиков. Для индустриальных отраслей, составляющих основу народного хозяйства страны, готовят специалистов *энергомашиностроительный*, *механико-машиностроительный*, *гидротехнический* и *физико-металлургический факультеты*. Для работы в планирующих органах, в вычислительных центрах, в планово-производственных отделах предприятий готовят специалистов на *инженерно-экономическом факультете*. Недавно в политехническом институте был образован *факультет автоматизации управления* для подготовки специалистов по автоматизированным системам управления, технической кибернетике, электронно-вычислительным машинам и приборам автоматики. Новая специализация *«роботы и манипуляторы»* образована на механико-машиностроительном факультете.

Всего в институте по 60 специальностям обучаются 18,5 тыс. студентов и около 500 аспирантов.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(*Гидротехнический, электромеханический, энергомашиностроительный, механико-машиностроительный и физико-металлургический факультеты.*)

1. Упростить выражение

$$\frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}}{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}\cdot\left(\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{a^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{b}}+\right.$$

$$\left.+\frac{a-\sqrt{ab}}{(b-a)\sqrt[4]{b^{-3}}}\right)-\sqrt[4]{b}\,.$$

2. Решить уравнение

$$4\log_2^2\frac{x}{\sqrt[8]{2}}-3\log_2 2x=8^{-\frac{4}{3}}.$$

3. Решить уравнение

$$\mathrm{tg}^4 x=\cos^3 2x+1.$$

4. В конус вписана треугольная пирамида, в основании которой лежит равнобедренный треугольник. Каким должен быть угол между боковыми сторонами этого треугольника, чтобы объем пирамиды был наибольшим, при условии, что объем конуса задан?

Вариант 2

(*Физико-механический, инженерно-экономический, радиофизический факультеты и факультет автоматизации управления.*)

1. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{7}}(x^2-5x+4)>-1.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=\dfrac{10}{3},\\ xy-2x-2y=2.\end{cases}$$

3. Высота конуса является одновременно диаметром шара. Радиус шара равен R, угол при вершине осевого сечения конуса равен α. В шар помещен куб так, что четыре его вершины лежат на поверхности шара вне конуса, а остальные четыре — на боковой поверхности конуса; плоскости, проходящие через эти четверки вершин, параллельны плоскости основания конуса. Найти ребро куба.

4. Доказать, что для углов равнобедренного треугольника A, B, C справедливо неравенство

$$\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}\cdot\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}\cdot\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{27}.$$

Физика

Задачи устного экзамена

1. Два тела могут двигаться по двум параллельным прямым. Первое тело движется с ускорением $|\vec{a}_1|=0{,}1$ м/с². В тот момент, когда первое тело, имея скорость $|\vec{v}_1|=1$ м/с, поравнялось со вторым, стартует второе тело и, двигаясь равноускоренно, догоняет первое тело через $t=20$ с. Найти величину максимального отставания второго тела от первого.

2. Цилиндрическая труба радиусом $R=1$ м катится по горизонтальной поверхности так, что ее центр перемещается с ускорением $|\vec{a}|=4{,}9$ м/с². Внутри трубы находится маленькое тело, коэффициент трения скольжения которого о внутреннюю поверхность трубы равен $\mu=0{,}5$. На какой высоте от горизонтальной поверхности при этом движении находится тело? Толщиной стенок трубы пренебречь.

3. От поезда массой $M=600$ т, идущего с постоянной скоростью по прямолинейной горизонтальной дороге, отрывается последний вагон массой $m=60$ т. Какой путь до остановки пройдет этот вагон, если в момент его остановки поезд движется с постоянной скоростью $|\vec{v}|=40$ км/ч? Мощность тепловоза, ведущего состав вагонов, постоянна и равна $N=10$ МВт.

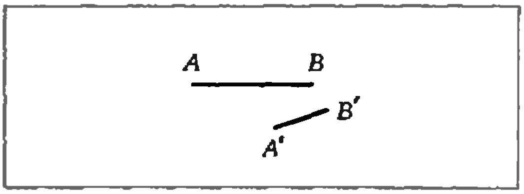
4. К вертикальной упругой невесомой нити подвесили груз массой $m_1=1$ кг и без толчка отпустили. После возникших затухающих колебаний груз остановился, и оказалось, что против силы сопротивления была совершена работа $A_1=2$ Дж. Какая работа будет совершена против силы сопротивления в таком же опыте, если подвесить груз массой $m_2=2$ кг?

5. Два маленьких одноименно заряженных шарика закреплены в вакууме на расстоянии, значительно превышающем их линейные размеры. Если отпустить первый шарик, то при достижении расстояния r между шариками его скорость будет равна $|\vec{v}_1|=3$ м/с; если отпустить второй, то при тех же условиях его скорость будет $|\vec{v}_2|=4$ м/с. Найти скорости шариков в тот момент, когда они разойдутся на расстояние r, если оба шарика отпустить одновременно.

6. Маленький заряженный шарик подвешен на нерастяжимой невесомой нити; сила натяжения нити равна $|\vec{F}|$. На место первого шарика помещают одноименно заряженный второй такой же шарик, и первый отклоняется от первоначального положения на угол, меньший 180°. Найти новое натяжение нити.

7. Уединенный металлический шар радиусом $R_1=10$ см окружен диэлектриком ($\varepsilon=2$). Диэлектрик образует сферический слой с радиусами $R_1=10$ см и $R_2=20$ см. Найти потенциал шара, если его заряд $q=10^{-8}$ Кл.

8. В однородном магнитном поле, меняющемся по гармоническому закону с частотой $\nu=1$ МГц, находится отрезок цилиндрической трубы. Ось трубы совпадает с направлением поля. Радиус трубы



$r=10$ см, толщина стенки $h=0{,}5$ мм. Найти амплитуду индукции магнитного поля, при которой начнется пластическая деформация трубы. Максимальное давление, при котором начинается пластическая деформация трубы, равно $p_м=10^7$ Па. Удельное сопротивление материала трубы $\rho=3\cdot10^{-8}$ Ом·м.

9. Дан предмет AB и его изображение $A'B'$ в линзе (см. рисунок). Найти расположение линзы, считая ее тонкой. Указать расположение главных фокусов линзы.

10. Часовщик в обычной жизни носит очки оптической силой $D=-6$ дптр. Для работы с часовыми механизмами он снимает очки и приставляет к глазу лупу, на которой обозначено, что она дает пятикратное увеличение. Какое в действительности он получает увеличение лупы?

Ю. Максимов, Ю. Молодкин, П. Соболев

Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Отец хочет разделить 180 яблок между пятью своими детьми. Половину яблок он отдает своим сыновьям, которые делят их между собой поровну, а другую половину отдает дочерям, которые тоже делят их поровну. Оказалось, что каждая дочь получила на 15 яблок больше, чем каждый сын. Сколько у отца было сыновей и дочерей?

2. Решить уравнение
$$\sin^2 2x + \sin^2 x = 1.$$

3. Решить уравнение
$$3^{\frac{x}{5}} + 3^{\frac{x-10}{10}} = 84.$$

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=3x^3-9x^2+2$ в промежутке $[-1;\ 1]$.

5. Дано p арифметических прогрессий, каждая из которых содержит n членов. Их первые члены соответственно равны $1, 2, 3, \ldots, p$, а разности $1, 3, 5, \ldots, 2p-1$. Найти сумму членов всех прогрессий.

Вариант 2

1. Мотоциклист задержался у шлагбаума на 24 мин. Увеличив после этого скорость на 10 км/час, он наверстал опоздание на перегоне в 80 км. Определить скорость мотоциклиста до задержки.

2. Решить уравнение
$$2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0.$$

3. Решить уравнение
$$\frac{\lg 8 - \lg(x-5)}{\lg\sqrt{x+7} - \lg 8} = -1.$$

4. Найти максимумы и минимумы функции
$$f(x) = x\cdot e^{x-x^2}.$$

5. Решить уравнение
$$2^{1-\log_2 x+\log_2^2 x-\log_2^3 x+\ldots} = x.$$

С. Мальчиков

Саратовский политехнический институт

Саратовский политехнический институт является в настоящее время крупнейшим вузом Поволжья. История его ведет свой счет с 1930 года, когда в Саратове был открыт автомобильно-дорожный институт. В мае 1960 года Саратовский автомобильно-дорожный институт был преобразован в политехнический. Ныне ежегодный выпуск составляет свыше 2500 человек.

Подготовку 17 тысяч студентов института — будущих инженеров по 28 специальностям — ведут свыше 1000 преподавателей, в том числе 25 профессоров и почти 500 доцентов и кандидатов наук.

В институте имеются шесть факультетов дневного обучения: *автомеханический, дорожно-строительный, строительный, машиностроительный, энергетический* и *факультет электронной техники и приборостроения*. Кроме того, имеются филиалы в городах Саратовской области — Балакове, Балашове, Вольске и Энгельсе. При институте имеется подготовительный факультет, работают подготовительные курсы с различным объемом учебных программ.

Все обучающиеся в СПИ в обязательном порядке осваивают новейшую вычислительную технику, пользуются прекрасной научно-технической библиотекой, выполняют различные задания в хорошо оснащенных лабораториях.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Плоская фигура состоит из прямоугольника и равностороннего треуголь-

ника, имеющего с прямоугольником общую сторону. Каковы должны быть размеры фигуры, чтобы при данном периметре p площадь фигуры была наибольшей? (Общая сторона прямоугольника и треугольника не входит в периметр p.)

2. Предварительно упростив выражение, найти предел

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\mathrm{ctg}^3 x}{2-\mathrm{ctg}\, x-\mathrm{ctg}^3 x}.$$

3. В геометрической прогрессии дано: $a_1+a_5=51$, $a_2+a_6=102$. При каком n сумма $S_n=3069$?

4. Решить уравнение

$$\sin 6x+\sin 2x=\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\, 2x.$$

Вариант 2

1. Предварительно упростив выражение

$$\left(\frac{x+8}{\sqrt[3]{x^2}-4}-\frac{2\sqrt[3]{x^2}-4\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-4\sqrt[3]{x}+4}\right)^{-1}\times$$
$$\times\left(x-2\sqrt[3]{x^2}\right),$$

найти предел при $x\to 8$.

2. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны a. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом β. В этой пирамиде проведена плоскость через ее высоту и вершину угла, заключенного между равными боковыми сторонами треугольника, лежащего в основании. Определить площадь полученного сечения.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\frac{1}{5}x^5+4x^2$ на отрезке $[-1;\ 1]$.

4. Решить уравнение
$$\cos x-\cos 2x-\sin 3x=0.$$

Ю. Сунгурцев

(Начало см. с. 20, 32, 48)

28, 31, 32; *Р. Бабаев* (Баку) 23, 24; *А. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) 23—26, 28, 31, 32; *В. Беркут* (Днепропетровск) 24, 26; *Г. Борисов* (Новосибирск) 26—28; *М. Валейко* (Киев) 23, 31; *А. Велько* (п. Сахарный Завод Минской обл.) 23, 24, 28; *М. Гаврилов* (п. Черноголовка Московской обл.) 23—28, 30—32; *А. Геращенко* (Новосибирск) 30; *Л. Гитлин* (Витебск) 28; *М. Гольцман* (Днепропетровск) 24, 27, 28, 31; *И. Гопич* (Новосибирск) 23, 26, 28, 31, 32; *О. Гордиенко* (Павлодар) 24; *И. Грузберг* (Пермь) 23; *А. Гуляев* (Москва) 23; *И. Даниловский* (Горький) 23, 25, 28, 31, 32; *В. Дидух* (Львов) 31; *С. Довбыш* (Москва) 28, 31; *С. Долженко* (Донецк) 23, 24, 26—28, 31, 32; *А. Дремин* (п. Черноголовка Московской обл.) 23, 24; *А. Елишевич* (Чернигов) 28; *А. Ермолин* (Петрозаводск) 23, 28; *В. Жордочкин* (Орск) 23, 24, 30, 31; *К. Жуков* (Москва) 23—27; *Г. Заславский* (Тбилиси) 28; *Е. Зудин* (Александров) 23, 25—32; *А. Ивайта* (Каунас) 28, 32; *Ф. Кабдыкаиров* (Алма-Ата) 24—26; *А. Капрелов* (Тбилиси) 28; *В. Карапетян* (Ленинакан) 26; *А. Клинк* (Ковров) 31; *В. Ковтуненко* (Киев) 28, 32; *Е. Коган* (Днепропетровск) 23, 32; *Г. Кожаридзе* (Телави) 23, 32; *Д. Коломийцев* (Сумгаит) 23, 24, 28; *И. Коротков* (Волгоград) 26, 31, 32; *А. Костерев* (Семилуки) 23—25, 27, 28, 31, 32; *А. Крупцев* (Курск) 24, 31; *Е. Кузьмин* (Череповец) 25, 28, 29; *А. Куприн* (Москва) 23—29; *В. Курьян* (Ростов-на-Дону) 23—28; *В. Лашкин* (Киев) 23—28, 30—32; *А. Леонович* (Лида) 23, 24, 28; *Д. Людмирский* (Киев) 24—28, 31, 32; *С. Маламанов* (Ленинград) 31; *Р. Мешойрер* (Москва) 23; *А. Минаев* (Саратов) 28, 29, 31; *А. Могильнер* (Свердловск) 27, 28, 32; *А. Молотовщиков* (Тейково) 23, 24, 27, 28, 31; *И. Молчанов* (Киев) 25, 27; *С. Молчанов* (Сумы) 28, 31; *В. Никифоров* (Великие Луки) 28; *Д. Нишнианидзе* (Кутаиси) 28; *А. Оглоблин* (Иркутск) 23, 27, 28, 30, 31; *С. Омельченко* (Жданов) 31; *И. Омелян* (Львов) 23, 26—29, 31; *О. Оразмамедов* (р/ц Кызыл-Атрек ТССР) 27, 28; *А. Орлов* (п. Черноголовка Московской обл.) 24—28, 31, 32; *Т. Павелкина* (Киев) 23, 24, 26—28, 31; *И. Педак* (Запорожье) 24; *А. Перов* (Москва) 24—26, 28, 31, 32; *А. Прашмо* (Гоголин, ПНР) 28, 31; *С. Прядкин* (Киев) 23, 24, 26—28, 31, 32; *С. Пузанов* (Одинцово) 32; *С. Пушкарев* (Курск) 24, 29, 30; *Л. Райков* (Невель Псковской обл.) 23, 24; *В. Редикульцев* (Москва) 23—27; *И. Романовский* (Лида) 23, 24, 26, 27, 31; *И. Рузин* (Ленинград) 23, 24, 26, 27; *И. Савенков* (р. п. Лысые Горы Саратовской обл.) 23—28, 31, 32; *О. Самохин* (Железногорск) 28, 31; *С. Сафронюк* (Ровно) 23, 24, 26, 28, 31; *В. Сачков* (Чебоксары) 23—26, 28, 31; *В. Середа* (Львов) 23, 28, 30, 31; *И. Сильвестров* (Новосибирск) 23—32; *В. Симонов* (Оренбург) 23, 24, 26; *А. Степанович* (Никольский Карагандинской обл) 23, 28; *С. Трохов* (Оренбург) 23, 24, 26—28, 31, 32; *К. Трутнев* (Казань) 23—26, 28—32; *О. Трушин* (Кострома) 27; *Н. Федин* (Омск) 23, 25—32; *С. Хосид* (Алма-Ата) 28, 31, 32; *А. Чекмезов* (Москва) 23, 24, 28; *В. Шаблинский* (Киев) 28, 32; *В. Шарафян* (Ереван) 24; *А. Ширяев* (с. Рождествено МордАССР) 28; *С. Шичанин* (Невинномысск) 23—28, 30, 32; *С. Шишков* (Москва) 23—32; *Е. Шкляр* (Гомель) 28; *М. Эфроимский* (Ленинград) 23—32; *М. Яковлев* (Кемерово) 26; *В. Яровой* (Ленинград) 24—28, 31, 32.

Проверь себя

VIII класс. *Алгебра.* 1 — А, 2 — Г, 3 — Б, 4 — В, 5 — В, 6 — Б. *Геометрия.* 7 — Г, 8 — Г, 9 — Д, 10 — А.

IX класс. *Алгебра и начала анализа.* 1 — А, 2 — В, 3 — Г, 4 — Б, 5 — В, 6 — Г. *Геометрия.* 7 — Д, 8 — Б, 9 — В, 10 — Г.

X класс. *Алгебра и начала анализа.* 1 — Б, 2 — В, 3 — В, 4 — Б, 5 — Г, 6 — В. *Геометрия.* 7 — Д, 8 — Б, 9 — А, 10 — В.

Можно ли проверить ответ?

1. Правильный ответ:

$$x = \frac{m}{M+m} L.$$

2. См. рис. 1.

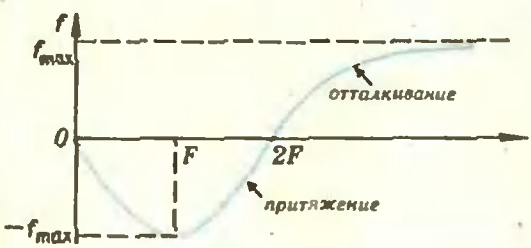


Рис. 1.

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1978 году

Московский автомобильно-дорожный институт

Математика

Вариант 1

1. $\frac{2\sqrt{3}}{3}R$. 2. $\ln 2 - \frac{5}{8}$. 3. $x = \frac{\pi}{4}k\ (k \in Z)$.

4. $]-1;\ 3[\,\cup\,]3;\ +\infty[$. 5. $\left\{\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)\right\}$.

Вариант 2

1. Точка 0 — точка минимума, промежутки убывания — $]-\infty;\ 0]$ и $]1;\ +\infty[$, промежуток возрастания — $[0;\ 1[$. 2. $310\frac{2}{7}\cdot\pi$.

3. $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k\ (k \in Z)$. 4. $]-\infty;\ -\frac{14}{3}[\,\cup\,]4;\ +\infty[$. 5. $\left\{\frac{1}{16},\ 1\right\}$.

Физика

Вариант 1

2. $|\vec{a}| = \frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2} g = 0{,}98$ м/с²;

$|\vec{F}| = \frac{m_1 m_2 (1+\mu)}{m_1 + m_2} g = 8{,}8$ Н.

3. $T_2 = \frac{V_2}{V_1} T_1 = 586$ К.

4. $r = \frac{P_1 I_2 - P_2 I_1}{I_1 I_2 (I_2 - I_1)} = 0{,}1$ Ом;

$\mathscr{E} = I_1 r + P_1/I_1 = 2{,}2$ В.

5. См. рис. 2.

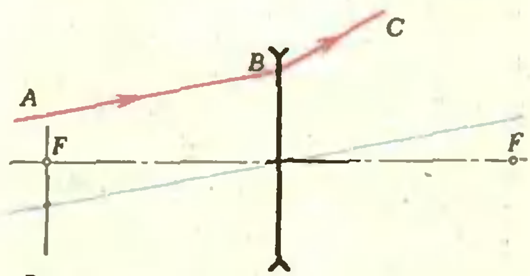


Рис. 2.

Вариант 2

2. $|\vec{v}_1| = |\vec{v}|\sqrt{1 - m/M}$;

$|\vec{v}_2| = |\vec{v}|\, m/M$.

3. $A = p_1(V_2 - V_1) + p_4(V_4 - V_3) = 1{,}25\cdot 10^5$ Дж.

4. $A = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = 2\cdot 10^{-2}$ Дж.

5. $n = \frac{1}{\sqrt{\sin^2\beta_1 + \sin^2\beta_2}} = 1{,}15$.

Московский инженерно-строительный институт им. В. В. Куйбышева

Математика

Вариант 1

1. Первый — 46, второй — 40.

2. $(\sqrt{5}+1)a^3$. 3. $\left\{\frac{9}{16}\right\}$. 4. $x = \pi + 2\pi k\ (k \in Z)$.

5. $]-5;\ 0[$.

Вариант 2

1. 40 коп., 60 коп., 80 коп., 1 руб.

2. $2 : \frac{3}{4}\sqrt{3} : \frac{3}{2}\sqrt{3}$. 3. $]-\infty;\ -\frac{1}{3}[\,\cup\,]1;\ +\infty[$. 4. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k\ (k \in Z)$. 5. arctg 9; $y = 9x - 23{,}25$.

Билет 1

3. $42\frac{2}{3}$. 4. $\left]-\frac{3^{\sqrt{2}}+1}{2};\ -\frac{1}{2}\right[$.

Билет 2

3. $]2;\ 4[\ \cup\ ]4;\ 6[$. 4. $\{5+\log_3 7\}$.

Физика

1. $t\approx 8{,}75$ с; $s_1\approx 99$ м; $s_2\approx 151$ м.

2. $\frac{V_1}{V}=\dfrac{\rho_2-\dfrac{\rho|\vec{P}_1|}{|\vec{P}_1|-|\vec{P}_2|}}{\rho_2-\rho_1}=0{,}25=25\%$;

$\frac{V_2}{V}=0{,}75=75\%$; $V=\frac{|\vec{P}_1|-|\vec{P}_2|}{\rho g}=$

$=400$ см^3; здесь $\rho=1$ г/см^3 — плотность воды.

3. $Q=m(gl\sin\alpha-|\vec{v}|^2/2)\approx 100$ Дж.

4. $q=\frac{(\rho_M-\rho)\,\pi\varepsilon\,d^3 g}{6|\vec{E}|}\approx 5{,}3\cdot 10^{-8}$ Кл, где $\rho_M=8{,}9\cdot 10^3$ кг/м^3 — плотность меди.

5. $H=nh=1$ м.

Московский институт химического машиностроения
Математика

Вариант 1

1. $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k\ (k\in\mathbf{Z})$. 2. $\left[\frac{1}{100};\ 10\right]$.

3. $\frac{\sqrt{3}}{3}h^3\cos\alpha(2\sin\alpha+1)$. 4. В точке -2 — максимум, в точке 1 — минимум. 5. $\frac{3}{4}\pi$.

Вариант 2

2. (1). 3. $\frac{1}{4}l^3\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin 2\beta$. 4. $\frac{2}{3}$.

5. $3\left(1-\frac{1}{4\ln 2}\right)$.

Физика

1. $h_1=\frac{4V}{\pi D^2}\frac{(1+\alpha t_1)(1+2\beta t)}{(1+\alpha t)(1+2\beta t_1)}\approx$

$\approx\frac{4V}{\pi D^2}\frac{1+(\alpha-2\beta)t_1}{1+(\alpha-2\beta)t}\approx 714$ см.

2. $\Delta h_1=\frac{\rho_B h}{\rho_{PT}(1+d_1^2/d_2^2)}\approx 5{,}6$ см;

$\Delta h_2=\Delta h_1(d_1/d_2)^2\approx 0{,}3$ см.

3. $p_1/p_2=2T_1/T_2=3$.

4. $\Delta m=(\rho_1 r_1/100\%-\rho_2)V=0{,}79$ кг.

Московский институт электронного машиностроения
Математика

Вариант 1

1. $x_1=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $x_2=\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi l$ $(k,l\in\mathbf{Z})$.

2. $S=\frac{9}{2}$. Докажем, что $\triangle ABC$ переходит в себя только при тождественном отображении и при осевой симметрии S_l, где $C\in l$ и $l\perp(AB)$. Пусть A', B', C' — образы соответствующих вершин при перемещении φ, переводящем $\triangle ABC$ в себя. Из того, что в $\triangle ABC$ расстояние $|AC|=|BC|$ достигается только между A и C и между B и C, и того, что $|A'C'|=|AC|$ и $|B'C'|=|BC|$, вытекает, что либо $[A'C']=[AC]$ и $[B'C']=[BC]$, либо $[A'C']=[BC]$ и $[B'C']=[AC]$. В первом случае $C'\in[AC]\cap[BC]$; значит, $C'=C$; тогда $A'=A$ и $B'=B$; поскольку перемещение φ имеет три *неподвижные точки*, φ — тождественное отображение. Во втором случае $C'=C$, $A'=B$ и $B'=A$; значит, $\varphi=S_l$.

3. $x_1=30$, $x_2=84$, $x_3=180$; 546 является членом данной последовательности, 548 и 1978^{1978} — нет. Указание. x_n делится на 6 при любом n. 4. На $]2;\ 3[$ f возрастает, на $]3;\ +\infty[$ f убывает, $x=3$ — точка максимума. 5. $x\geqslant 0$, кроме $x=\frac{\pi}{2}+\pi k\ (k\in\mathbf{Z})$, и $x=\pi l\ (l=-1,\ -2,\ -3,\dots)$.

Вариант 2

1. $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k\ (k\in\mathbf{Z})$. 2. $A'=(6;\ 3)$, $M'=M$, $C'=(7;\ 9)$. 3. $C_{11}^6<C_{11}^3+C_{11}^4$; неравенство $C_n^6<C_n^3+C_n^4$ справедливо при $6\leqslant n\leqslant 11$. Указание. Функция

$$f(n)=\frac{120}{(n-3)(n-4)(n-5)}+\frac{30}{(n-4)(n-5)}$$

— убывающая.

4. $\max\limits_{[0,14;\ 1]} f(x)=f(1)=e+\frac{2}{e}+4$,

$\min\limits_{[0,14;\ 1]} f(x)=f\left(\frac{1-\ln 2}{2}\right)=\frac{10-7\ln 2}{2}$.

Решение. $f'(x)=0$ при $e^{2x_0-1}=\frac{1}{2}$ или $x_0=\frac{1-\ln 2}{2}$. При $x<x_0$ функция f убывает, при $x>x_0$ — возрастает; при $x=x_0$ она имеет минимум. Очевидно, $x_0<1$. Поскольку $x_0>0{,}14\Leftrightarrow\ln 2<0{,}72\Rightarrow e^{18}>2^{25}$ и $e^{18}>(2{,}7)^{18}=[(2{,}7)^3]^6=19{,}683^6>19^6=$

$=(19^2)^3=361^3>360^3=2^9\cdot 45^3>2^9\cdot 45\cdot 40^2=2^{15}\cdot 45\cdot 25=2^{15}\cdot 1125>2^{15}\cdot 1024=2^{25}$, получаем $x_0>0{,}14$. Значит, $\min\limits_{[0,14;\,1]} f(x)=f(x_0)$. Из $f(1)=e+\frac{2}{e}+4>6$ и $f(0{,}14)=e^{-0,72}+2e^{0,72}+0{,}98-3<1+2e+1-3=2e-1<5$ следует $\max\limits_{[0,14;\,1]} f(x)=f(1)$.

5. б) $\left[\frac{10}{3};\ +\infty\right[$. Указание. a — хорошее $\Leftrightarrow a\geqslant \max\limits_{R}\frac{2x^2+2x+3}{x^2+x+1}$.

Вариант 3

1. $x_1=6$, $x_2=\frac{\pi}{3}+2\pi k$ $(k=1,2,3,\ldots)$, $x_3=-\frac{\pi}{3}+2\pi l$ $(l=2,3,4,\ldots)$, $x_4=\frac{2}{3}\pi+2\pi m$ $(m=0,\ -1,\ -2,\ -3,\ldots)$, $x_5=-\frac{2}{3}\pi+2\pi n$ $(n=1,0,-1,-2,-3,\ldots)$.

2. $S=2\sqrt{3}$. $C=(1+\sqrt{3};\ 1+\sqrt{3})$ или $C=(1-\sqrt{3};\ 1-\sqrt{3})$. Тождественное отображение, три осевые симметрии с осями — высотами треугольника, два поворота вокруг центра треугольника — на 60° и на —60°. Указание. При перемещениях плоскости, при которых $\triangle ABC$ отображается на себя, его вершины переходят в вершины.

3. $C_{24}^4\cdot C_{20}^4\cdot C_{16}^4=\frac{24!}{(4!)^3\cdot 12!}$. 4. Первообразные для функции f на $]-3;\ 1[$ имеют вид $-\frac{2}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2-6x+C$, на $]1;\ 3[$ — вид

$$F(x)=\begin{cases}-\frac{2}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2-6x-\frac{10}{3}+A, & \text{если } 1<x<2,\\ A, & \text{если } x=2,\\ \frac{2}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+6x-\frac{10}{3}+A, & \text{если } 2<x<3.\end{cases}$$

Указание. F непрерывна при $x=2$.

5. $\min\limits_{\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]} f(x)=f\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=3\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{2}$. Имеет (например, $x=\frac{\pi}{3}$).

Физика

1. $t=\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2}\sqrt{\frac{2s}{g}\operatorname{tg}\alpha_1}\approx 0{,}88$ с.

2. Возможны три случая. а) Все тела покоятся: $|\vec{F}|\leqslant 3k_1mg=2{,}94$ Н; $|\vec{a}_1|=|\vec{a}_2|=|\vec{a}_3|=0$. б) Вся система тел движется как единое целое: $3k_3mg<|\vec{F}|\leqslant 2(k_1+k_2)mg=5{,}88$ Н; $0<|\vec{a}_1|=|\vec{a}_2|=|\vec{a}_3|=\frac{|\vec{F}|}{3m}-k_3g\leqslant 0{,}98$ м/с².

в) Все тела движутся относительно поверхности Земли, причем тела *1* и *3* относительно друг друга покоятся, а тело *2* движется относительно этих тел: $|\vec{F}|>2(k_1+k_2)mg=5{,}88$ Н; $|\vec{a}_1|=|\vec{a}_3|=k_1g=0{,}98$ м/с²; $|\vec{a}_2|=\frac{|\vec{F}|}{m}-(k_1+2k_2)g>0{,}98$ м/с².

3. $L_{\max}=l\sqrt{1+k^2}\approx 2{,}04$ м.

4. $s=\frac{2|\vec{v}_0|^2\cos\alpha}{g}\sqrt{\sin^2\alpha-f}=1{,}96$ м.

5. $x=x_M\cos(\omega t+\varphi_0)=\frac{2E}{F_M}\cos(2\pi\nu t+\varphi_0)=4\cos(2\pi t+\pi/6)$см.

6. $h=\frac{Pt-Mc(t_п-t_0)}{\mu\lambda}\frac{RT_п}{pS}\approx 2{,}5$ м.

7. $q=CU=2\cdot 10^{-4}$ Кл.

8. $q=C\frac{R_1(\mathcal{E}+\mathcal{E}_2)+R_2(\mathcal{E}+\mathcal{E}_1)}{R_1+R_2}=6{,}5\cdot 10^{-5}$ Кл; $q_0=C_0(\mathcal{E}_2-\mathcal{E}_1)=10^{-5}$ Кл.

9. $D=\frac{2F}{\sqrt{n^2-1}}\approx 50$ см.

10. $\gamma=\frac{F_{об}}{F_{ок}}\gamma'=7^\circ 45'$.

Московский экономико-статистический институт

Математика

1. 20. 2. 35. 3. —1. 4. 18. 5. 4. 6. —3. 7. 60. 8. —13. 9. —12. 10. —7. 11. —1. 12. 45. 13. 3. 14. 2. Указание. См. задачу № 13 к п. 81 «Геометрии 7». 15. 14. 16. $^1/_4$.

Физика

1. $h=57{,}8$ м.

2. $m_л=m_ч\frac{l_л-l}{l}=120$ кг.

3. $N=2mg\alpha|\vec{v}|=25$ кВт.

4. $n=\frac{\lg(p_n/p)}{\lg(V/(V+V_0))}=49$.

5. $|\vec{v}|=\sqrt{\frac{2}{\eta}(c(T_{пл}-T)+\lambda)}=3{,}5\cdot 10^2$ м/с.

6. $q=2l\sin\alpha/2\times\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mg\sin\alpha/2}\approx 5{,}2\cdot 10^{-8}$ Кл.

7. $R_д=R_V(U/U_V-1)=3{,}8$ кОм.

8. $t = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = 6$ мин.

9. $\mathscr{E} = B_y l\,|\vec{v}| = 0{,}45$ В.

10. $F = \frac{f}{\Gamma + 1} = 8$ см.

Ленинградское высшее ордена Ленина Краснознамённое училище железнодорожных войск и военных сообщений им. М. В. Фрунзе

Математика

Вариант 1

1. 0. 2. x^6. 3. $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k\ (k \in Z)$.

5. $\frac{7}{25}$.

Вариант 2

1. $x\sqrt[4]{x}$, если $x > 3$; $-x\sqrt[4]{x}$, если $0 < x < 3$. 2. $\{4\}$. 3. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $x_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi l\ (k, l \in Z)$ 4. $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi\sqrt{3}}{2}$.

5. 7 ln 3.

Билет 1.

4. 12.

Физика

1. Высота H подъема лифта численно равна площади трапеции $OABC$ (рис. 3): $H = |\vec{v}|(t_1 + 2t_2 + t_3)/2 = 26$ м.

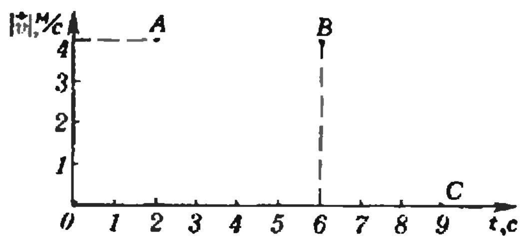


Рис. 3.

2. $H = \frac{(h + gt^2/2)^2}{2gt^2} \approx 534$ м.

3. $|\vec{F}_д| = m(g + |\vec{a}|) = 756$ Н.

4. $p = \rho gh + 4\sigma/d = 1{,}02\cdot 10^5$ Н/м².

5. $d = F(1 + H/h) = 12{,}55$ м.

6. $E_{св} = c^2(92\,m_p + (235 - 92)\,m_n - m_я) \approx 18{,}5\cdot 10^2$ МэВ.

Ленинградский гидрометеорологический институт

Математика

Вариант 1

2. $\{2\}$. 3. $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x_2 = 2\pi l\ (k, l \in Z)$.

4. При $b > 0$ и либо $b^2 = 3a^2$, либо $\frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{a}{b} < 1$, либо $-1 < \frac{a}{b} < -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a^2 + b^2 + \sqrt{(3a^2 - b^2)(3b^2 - a^2)}}{4b}, \\ y_1 = \dfrac{a^2 + b^2 - \sqrt{(3a^2 - b^2)(3b^2 - a^2)}}{4b}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{a^2 + b^2 - \sqrt{(3a^2 - b^2)(3b^2 - a^2)}}{4b}, \\ y_2 = \dfrac{a^2 + b^2 + \sqrt{(3a^2 - b^2)(3b^2 - a^2)}}{4b}. \end{cases}$$

Вариант 2

2. При $b \leqslant 0$ одно решение: (0; 0). При $b > 0$ и $a = b$ четыре решения: (0; 0), (0; b), (b; 0), (b; b). При $b > 0$ и либо $a < b$, либо $a \geqslant 3b$ два решения: (0; 0), (b; b). При $b > 0$ и $b < a < 3b$ четыре решения: (0; 0), (b; b) и

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a + b + \sqrt{(3b - a)(3a - b)}}{4}, \\ y_1 = \dfrac{a + b - \sqrt{(3b - a)(3a - b)}}{4}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{a + b - \sqrt{(3b - a)(3a - b)}}{4}, \\ y_2 = \dfrac{a + b + \sqrt{(3b - a)(3a - b)}}{4}. \end{cases}$$

3. $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi l$, $x_3 = 2\pi m\ (k, l, m \in Z)$. 4. $C_{11}^3 = 165$.

Физика

1. $|\vec{F}_c| = \frac{m}{l}\left(gh - \frac{|\vec{v}|^2}{2}\right) = 17{,}6$ Н.

2. $\Delta t = \frac{gh - |\vec{v}|^2/2}{c} \approx 8$ К.

3. $R = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m v^2} \approx 5{,}2\cdot 10^{-11}$ м;

$|\vec{E}| = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \approx 5{,}3\cdot 10^{11}$ В/м.

4. $l_{min} = \frac{2h}{\sqrt{n^2 - 1}} \approx 23$ м.

Ленинградский институт точной механики и оптики

Математика

Вариант 1

1. 1. 2. —9. 3. $x_1 = \frac{\pi}{3}k$,

$x_2=(-1)^{l+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}l\ (k,\ l\in\mathbb{Z})$. 4. $y=-x$ и $y=x-1$. 5. $\frac{21}{2}x^6y^3$.

Вариант 2

1. 0. 2. $x_1=2\pi k,\ x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi l(k,\ l\in\mathbb{Z})$.

3. $[1;\ 3]$. 5. $6+6$.

Физика

1. $t=T/3$.

2. $q=4\pi\varepsilon_0\varphi\sqrt[3]{\frac{3V(r\rho_1-\rho_2)}{4\pi\rho_B}}\approx 2,8\times\times 10^{-13}$ Кл.

3. $|\vec{E}_2|/|\vec{E}_1|=1,8$.

4. $W_п/W_к=-2$.

5. $|\vec{v}|=\frac{q}{\sqrt{\pi\varepsilon_0 Rm}}\approx 10^5$ м/с.

6. $\frac{h}{l}=\frac{kU}{\rho\rho_н l}$.

7. $|SS'|=2(h+d/n)=2(h+{}^3/_4 d)$.

8. $F=\frac{d(a+b)}{a+b+2d}=15$ см.

9. $x=\frac{C\Delta\varphi}{en_0V}\approx 0,1$ рентген.

10. $n=\frac{\lambda}{h}\sqrt{3kmT}\approx 8,2\cdot 10^3$ фотонов.

Ленинградский кораблестроительный институт

Математика

Вариант 1

1. Область определения: $|a|>|b|$, $b\neq 0$; при $a>0$ выражение равно -25, при $a<0$ равно 25. 2. $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\ (k\in\mathbb{Z})$.

3. $\{4,36\}$. 5. $M(-1;\ 0;\ 0)$.

Вариант 2

1. Область определения: $a\neq 3x$, $a\neq\neq -3x$, $a\neq -x$; выражение равно 1. 2. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k\ (k\in\mathbb{Z})$. 3. $\{3,81\}$. 4. $]1;\ 4[$. 5. $y=-4x-12$, $y=4x-4$.

Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина

Математика

Вариант 1

1. $\sqrt[4]{a}$. 2. $\left\{\frac{1}{2}\sqrt{2},\quad 2\sqrt{2}\right\}$.

3. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k\ (k\in\mathbb{Z})$. 4. $\frac{\pi}{3}$.

Вариант 2

1. $\left]\frac{5-\sqrt{37}}{2};\ 1\right[\cup\left]4;\ \frac{5+\sqrt{37}}{2}\right[$.

2. $\left\{(5;\ 4),\ \left(-\frac{1}{2};\ -\frac{2}{5}\right)\right\}$.

3. $\frac{2\sqrt{2}R\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\sqrt{2}\right)}{1+\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\sqrt{2}\right)^2}$. 4. Указание. Если A — угол при основании и $x=\frac{A}{2}$, то $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}x(1-\operatorname{tg}^2x)$.

Физика

1. $\Delta s=s_1-s_2=|\vec{v}_1|t/4=5$ м.

2. $h=R\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\mu g+|\vec{a}|}{g-\mu|\vec{a}|}\right)^2}}\right)=0,4$ м.

3. $s=\frac{(M-m)^3|\vec{v}|^3}{2NM^2}=30$ м.

4. $A_2=\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^3A_1=8$ Дж.

5. $|\vec{v}_1|=\frac{|\vec{v}_1|^2}{\sqrt{|\vec{v}_1|^2+|\vec{v}_2|^2}}=1,8$ м/с; $|\vec{v}_2|=\frac{|\vec{v}_2|^2}{\sqrt{|\vec{v}_1|^2+|\vec{v}_2|^2}}=3,2$ м/с.

6. $|\vec{F'}|=|\vec{F}|$ (рекомендуем сделать чертеж).

7. $\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\varepsilon-1}{R_2}\right)=675$ В.

8. $B_м=\sqrt{\frac{2\rho p_м}{\pi rhv}}\approx 6,2\cdot 10^{-3}$ Т.

9. См. рис. 4.

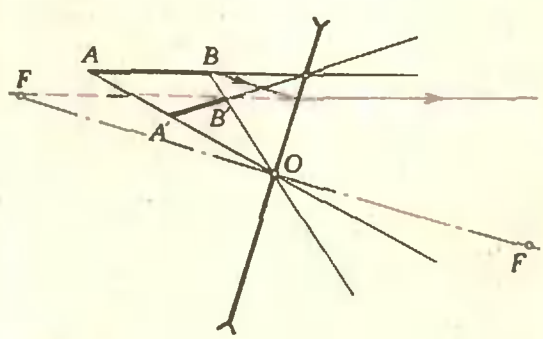


Рис. 4.

10. $\Gamma' = \dfrac{\Gamma - 1}{1 - Dd_0} + 1 = 2{,}6.$

Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Математика

Вариант 1

1. 3 сына, 2 дочери. 2. $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3}k\ (k \in \mathbf{Z})$. 3. $\{20\}$. 4. $\max\limits_{[-1;\ 1]} f(x) = f(0) = 2$, $\min\limits_{[-1;\ 1]} f(x) = f(-1) = -10$. 5. $\dfrac{np}{2}(1 + np)$.

Вариант 2

1. 40 км/час. 2. $x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k\ (k \in \mathbf{Z})$. 3. $\{9\}$. 4. $x = -\dfrac{1}{2}$ — точка минимума, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}$; $x = 1$ — точка максимума, $f(1) = 1$. 5. $\sqrt{2^{\sqrt{5}-1}}$.

Саратовский политехнический институт

Математика

Вариант 1

1. Длины сторон прямоугольника равны $\dfrac{p}{6 - \sqrt{3}}$ и $\dfrac{p(3 - \sqrt{3})}{2(6 - \sqrt{3})}$; треугольник построен на большей стороне. 2. $\dfrac{3}{4}$. 3. 10. 4. $x_1 = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k$, $x_2 = \dfrac{\pi}{2}l\ (k, l \in \mathbf{Z})$.

Вариант 2

1. 4. 2. $\dfrac{a^2}{4}\operatorname{tg}\beta$. 3. $\max\limits_{[-1;\ 1]} f(x) = f(1) = 4\dfrac{1}{5}$, $\min\limits_{[-1;\ 1]} f(x) = f(0) = 0$. 4. $x_1 = \dfrac{2\pi}{3}k$, $x_2 = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi l$, $x_3 = -\dfrac{\pi}{4} + \pi m\ (k, l, m \in \mathbf{Z})$.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 6)

1. Обозначим длину третьей стороны через x. Тогда по неравенству треугольника $6{,}31 + 0{,}82 = 7{,}13 > x$ и $0{,}82 + x > 6{,}31$, т. е. $x > 6{,}31 - 0{,}82 = 5{,}49$. Значит, $x = 6$ или $x = 7$.

2. Каждому многоугольнику с вершинами только в белых точках поставим в соответствие многоугольник с вершинами в тех же белых точках и в красной точке.

Поэтому «белых» многоугольников не больше «красных». Лишними остаются «красные» треугольники.

3. Известно, что сумма цифр делящегося на 9 числа сама делится на 9. Следовательно, A, B и C делятся на 9. Поскольку сумма цифр 1979-значного числа не превосходит $9 \times 1979 = 17811$, число A записывается не более чем пятью цифрами. Следовательно, сумма цифр числа A не более $9 \times 5 = 45$ и B не превосходит 45, а сумма цифр числа B не более $3 + 9 = 12$. Поскольку C делится на 9 и не превосходит 12, $C = 0$ или $C = 9$. Если $C = 0$, то $B = A = a = 0$, что противоречит условию. Ответ. $C = 9$.

4. Рассмотрим произведение всех чисел на шахматной доске. Оно не меняется при операции, поскольку умножается при этом на $(-1)^8 = 1$. Значит, оно равно своему начальному значению $(-1)^{63} = -1$. Поэтому невозможно получить $+1$ во всех клетках, так как в этом случае произведение есть 1.

5. Хочется ответить — 12 яиц. Однако такой ответ неверен, поскольку 1 курица снесет за 3 дня 1 яйцо, за 12 дней — 4, а 12 куриц за 12 дней — $4 \times 12 = 48$.

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, Н. Смирнова, В. Чернов

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректоры Т. Панькова, Н. Румянцева

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16. «Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 3/V-79
Подписано в печать 18/VI-79
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 7,11 Т-09893
Цена 30 коп. Заказ 965. Тираж 277 656 экз

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли г. Чехов Московской области

КРОССВОРД

По горизонтали: **7.** Равенство, при определенных условиях превращающееся в тождество. **8.** Единица давления. **11.** Движение в воздухе. **12.** Английский физик — лауреат Нобелевской премии. **13.** Виднейший норвежский математик. **14.** Выпукло-вогнутая линза. **18.** Цветная полоса, образующаяся при разложении белого цвета. **20.** Отрезок, соединяющий вершины многоугольника. **21.** Метод научного исследования. **22.** Единица электрической емкости. **23.** Место соединения нескольких проводников. **24.** Обнаружение объекта при помощи отраженных радиоволн. **28.** Тяжелый изотоп водорода. **29.** Искусственный радиоактивный элемент. **30.** Прибор для определения влажности воздуха. **31.** Русский физик, соратник Ломоносова. **32.** Многогранник. **37.** Характерная точка оптической системы. **39.** Гипотетическая элементарная частица. **40.** Часть целого. **41.** Компонент дроби. **42.** Способ теплообмена.

По вертикали: **1.** Порция энергии. **2.** Французский математик и философ. **3.** Полудрагоценный камень. **4.** Неподвижная часть генератора. **5.** Метеорологические условия. **6.** Поверхность шара. **7.** Математическая операция. **9.** Размах колебаний маятника. **10.** Предмет изучения физики. **15.** Характеристика линзы. **16.** Огибание волнами препятствий. **17.** Двумерное множество точек. **19.** Прибор для измерения площадей по картам и чертежам. **25.** Советский ученый, специалист по ядерной физике. **26.** Универсальный электроизмерительный прибор. **27.** Геометрическое преобразование. **33.** Научно-фантастический роман А. Н. Толстого. **34.** Фигурная линейка. **35.** Мера длины. **36.** Часть кометы. **38.** Элемент реактивного двигателя. **40.** Одно из основных понятий геометрии.

В. Закревский

Цена 30 коп.
Индекс 70465

На фотографии изображена модель плоскости Лобачевского в виде поверхности, лежащей в нашем обычном евклидовом пространстве. Так же, как две поверхности, на первой странице обложки, она построена из детского конструктора. О математических принципах этих построений читайте заметку «Не только игрушка» на с. 21.